



*Bem - vindo(a)!*

# COMO ESTÁ O SEU DIÁLOGO COM A MATEMÁTICA?

Olá, *seja bem vindo (a)* à nossa plataforma de estudos com ênfase na preparação para o Exame Nacional do Ensino Médio, o ENEM.

Realizar os seus *Sonhos* é o meu maior objetivo. Para isso, comecei fazendo um apanhado dos 5 conteúdos que, estatisticamente, mais caíram dentro das 45 questões de matemática:

1. **Grandezas Proporcionais** (24%): Saber lidar com proporções e razões pode ser a grande chave para você mandar bem, já que praticamente 1 em cada 4 questões foram desse tema. E boa notícia: As comparações são muito simples e objetivas, em geral.

2. **Geometria Espacial** (13%): Esse assunto trata o estudo dos sólidos geométricos, como, por exemplo: prisma, cilindro, pirâmide, cone e esferas. Os exercícios deste tema cobram principalmente o cálculo do volume, área total e as principais razões de distância de cada poliedro. Para isso, a GEOMETRIA PLANA é crucial. Estude também as projeções ortogonais.

\*Estudar geometria analítica: Ponto, reta e circunferência

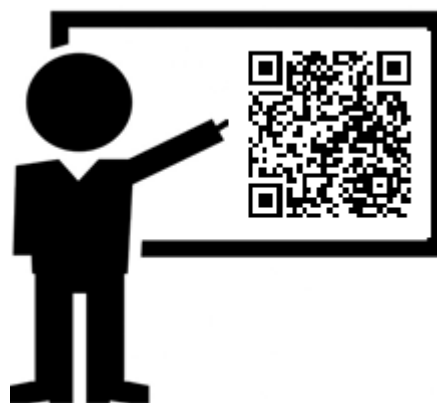
3. **Aritmética** (10%): Algumas sequências e padrões observados com os números, a exemplo das progressões (P.A. e P.G.), suas propriedades aritméticas e operações são importantíssimo ao desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno.

4. **Funções** (10%): As funções de primeiro e segundo grau costumam ser as mais recorrentes na prova. Com menos intensidade também aparecem as funções trigonométricas (essa sendo minha grande aposta), exponenciais e logarítmicas, esta, na maioria das vezes, exigindo bastantes conceitos e propriedades dos alunos.

5. **Estatística** (9%): A Estatística é a área da matemática que nos permite coletar, organizar e,

principalmente, interpretar os números dentro de um conjunto dos resultados. Cálculo de médias, medianas e modas, além das compreensões das medidas de dispersão, são praticamente garantia de questões assertivas do ENEM.

Para os alunos que quiserem um direcionamento por onde começar a *estudar do zero*, assistam ao vídeo abaixo e organizem seus estudos da maneira mais objetiva:



2



A TRI- teoria da resposta ao item é a forma em que sua nota no ENEM é calculada, levando em consideração o maior número de acertos às questões fáceis e médias. Portanto, mais vale acertar duas questões fáceis do que uma difícil!



*Desejo muita luz para irradiar-se quando a do sol não for suficiente para clarear tua alma. Estou com você nesse sonho!*

# ÁLGEBRA E ARITMÉTICA

3

$x^2$

## MÓDULO 1 Álgebra; Aritmética – Razão

### Números primos

Chamamos de números primos todo número inteiro diferente de 1 (um), cuja divisão exata só pode ser efetuada por ele mesmo e pelo número 1. Exemplos:

- O número 2 é um número primo, pois seus divisores são 1 e 2.
- O número 3 é um número primo, pois seus divisores são 1 e 3.
- O número 11 é um número primo, pois seus divisores são 1 e 11.
- O número 21 não é um número primo, pois seus divisores são 1, 3, 7 e 21.

### Fatoração de um número inteiro

Todo número inteiro pode ser representado de maneira única, por meio do produto de potências de números primos. Este resultado é conhecido por teorema da decomposição. Para decompor um número primo, seguimos de maneira sistemática realizando a divisão desse número até chegarmos ao número 1. Por exemplo: Para decompor o número 4, fazemos:

número	fatores primos
4	2
2	2
1	$2 \cdot 2 = 2^2$ (resultado)

Por isso, podemos escrever o número 4 em forma decomposta:  $4 = 2^2$

Para decompor o número 245, fazemos:

número	fatores primos
245	5
49	7
7	7
1	$5 \cdot 7 \cdot 7 = 5 \cdot 7^2$

### Mínimo múltiplo comum (MMC)

Dados dois números inteiros a e b, calcular o mínimo múltiplo comum entre estes dois números MMC (a, b) é encontrar o menor número que seja múltiplo dos dois ao mesmo tempo. Veja:

Para calcularmos o MMC, seguimos o mesmo método de decomposição, mas desta vez utilizando os dois números. Veja: Para calcularmos o MMC (6, 14):

6, 14	2
3, 7	3 (3 só divide o número 3, deixamos 7 da mesma forma)
1, 7	7 (com 7 chegamos ao número 1 nos dois lados)
1, 1	$2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ (resultado)

Para calcularmos o MMC (27, 78):

27, 78	3
9, 26	3
3, 26	3
1, 26	2
1, 13	13
1, 1	$3^3 \cdot 2 \cdot 13 = 702$ (resultado)

### Máximo divisor comum (MDC)

Dados dois números inteiros a e b, encontrar o máximo divisor comum entre eles MDC (a, b) é determinar o maior número que divide (de maneira exata) tanto a quanto b. Para calcularmos o MDC, decomparamos separadamente cada um dos números e identificamos os fatores comuns a ambos. Este será o maior número que divide os dois. Veja:

Para calcularmos o MDC (10, 65):  
Decompondo 10, temos:  $10 = 2 \cdot 5$ .  
Decompondo 65, temos:  $65 = 5 \cdot 13$ .  
Portanto, o MDC (10, 65) = 5.

Para calcularmos o MDC (9, 72):  
Decompondo 9, temos:  $9 = 3^2$ .  
Decompondo 72, temos:  $72 = 2^3 \cdot 3^2$ .  
Portanto, o MDC (9, 72) =  $3^2 = 9$ .

### Números primos entre si

Dois números inteiros a e b são ditos primos entre si, se  $MDC(a, b) = 1$ . Exemplos:

- 4 e 15 são primos entre si, pois  $MDC(4, 15) = 1$ .
- 12 e 66 não são primos entre si, pois  $MDC(12, 66) = 3$ .
- 9 e 112 são primos entre si, pois  $MDC(9, 112) = 1$ .

♣ Equações são usadas para resolver problemas em que não se conhece um dos fatores. Esse fator é chamado de incógnita, e geralmente é representado pela letra X.

♣ Potência é uma multiplicação de um número por si próprio repetida tantas vezes quanto o exponencial (o número sobrescrito) aparece. Raiz é a operação inversa à potência.

♣ Frações representam a divisão de dois números inteiros. A parte de cima (numerador) é dividida pela de baixo (denominador).

- Usamos razão para fazer comparação entre duas grandezas. Assim, quando dividimos uma grandeza pela outra estamos comparando a primeira com a segunda.
- Definição: Sabendo que existem duas grandezas **a** e **b**, a razão entre **a** e **b**, com **b** diferente de zero, é o quociente (o resultado da divisão) entre **a** e **b**: ou **a:b**.

♣ Sistemas de medidas são usados para comparar grandezas de mesma espécie com diferentes unidades. No decorrer da história, cada país desenvolveu as próprias medidas. A partir da Revolução Francesa, no século XVIII, surgiram tentativas de universalizar as medidas, primeiro no sistema métrico e depois no Sistema Internacional.

	Nome	Símbolo	Valor
Múltiplos	Quilômetro	km	1000 m
	Hectômetro	hm	100 m
	Decâmetro	dam	10 m
Unidade Padrão	Metro	m	1 m
Submúltiplos	Decímetro	dm	0,1 m
	Centímetro	cm	0,01 m
	Milímetro	mm	0,001 m



♣ Fatores de conversão são utilizados para adaptar uma medida a outra. Ao usar uma regra de três simples e conhecendo os fatores de conversão entre as diferentes medidas, é possível descobrir, por exemplo, a quantos centímetros equivalem 6 pés.

♣ Escalas são utilizadas para representar, em tamanho menor, grandezas que não caberiam no papel ou numa maquete. Elas são proporcionais aos tamanhos reais. Assim, é possível calcular a altura em metros e centímetros de um boneco de 13 polegadas em escala 1:6, ou prever num mapa a distância linear entre um ponto e outro.

$$\text{Escala} = \frac{\text{tamanho no desenho}}{\text{tamanho real}}$$

### Exercícios

1. (INEP-MEC) Existem muitas diferenças entre as culturas cristã e islâmica. Uma das principais diz respeito ao calendário. Enquanto o calendário cristão (gregoriano) considera um ano como o período correspondente ao movimento de translação da Terra em torno do Sol —

aproximadamente 365 dias —, o calendário muçulmano se baseia nos movimentos de translação da Lua em torno da Terra — aproximadamente 12 por ano, o que corresponde a anos intercalados de 254 e 255 dias. Considerando que o calendário muçulmano teve início em 622 da era cristã e que cada 33 anos muçulmanos correspondem a 32 anos cristãos, é possível estabelecer uma correspondência aproximada de anos entre os dois calendários, dada por:

- (A)  $C = M + 622 - (M/33)$ .
- (B)  $C = M - 622 + (C - 622/32)$ .
- (C)  $C = M - 622 - (M/33)$ .
- (D)  $C = M - 622 + (C - 622/33)$ .
- (E)  $C = M + 622 - (M/32)$ .

Obs.: (C = anos cristãos e M = anos muçulmanos).

2. (INEP-MEC) Um estudo sobre o problema do desemprego na Grande São Paulo, no período 1985-1996, realizado pelo SEADE-DIEESE, apresentou o seguinte gráfico sobre taxa de desemprego.



Fonte: SEP, Convênio SEADE-DIEESE.

Pela análise do gráfico, é correto afirmar que, no período considerado,

- (A) a maior taxa de desemprego foi de 14%.
- (B) a taxa de desemprego no ano de 1995 foi a menor do período.
- (C) a partir de 1992, a taxa de desemprego foi decrescente.
- (D) no período 1985-1996, a taxa de desemprego esteve entre 8% e 16%.
- (E) a taxa de desemprego foi crescente no período compreendido entre 1988 e 1991.

### Texto para as questões 3 e 4.

Um armazém recebe sacos de açúcar de 24 kg para que sejam empacotados em embalagens menores. O único objeto disponível para pesagem é uma balança de 2 pratos, sem os pesos metálicos.





**3. (INEP-MEC)** Realizando uma única pesagem, é possível montar pacotes de

- (A) 3 kg.
- (B) 4 kg.
- (C) 6 kg.
- (D) 8 kg.
- (E) 12 kg.

**4. (INEP-MEC)** Realizando exatamente duas pesagens, os pacotes que podem ser feitos são os de

- (A) 3 kg e 6 kg.
- (B) 3 kg, 6 kg e 12 kg.
- (C) 6 kg, 12 kg e 18 kg.
- (D) 4 kg e 8 kg.
- (E) 4 kg, 6 kg e 8 kg.

**Texto para as questões 5 e 6.**

Se compararmos a idade do planeta Terra, avaliada em quatro e meio bilhões de anos ( $4,5 \times 10^9$  anos), com a de uma pessoa de 45 anos, então, quando começaram a florescer os primeiros vegetais, a Terra já teria 42 anos. Ela só conviveu com o homem moderno nas últimas quatro horas e, há cerca de uma hora, viu-o começar a plantar e a colher. Há menos de um minuto percebeu o ruído de máquinas e de indústrias e, como denuncia uma ONG de defesa do meio ambiente, foi nesses últimos sessenta segundos que se produziu todo o lixo do planeta!

**5. (INEP-MEC)** O texto permite concluir que a agricultura começou a ser praticada há cerca de

- (A) 365 anos.
- (B) 460 anos.
- (C) 900 anos.
- (D) 10.000 anos.
- (E) 460.000 anos.

**6. (INEP-MEC)** Na teoria do Big Bang, o universo surgiu há cerca de 15 bilhões de anos, a partir da explosão e

expansão de uma densíssima gota. De acordo com a escala proposta no texto, essa teoria situaria o início do universo há cerca de

- (A) 100 anos.
- (B) 150 anos.
- (C) 1.000 anos.
- (D) 1.500 anos.
- (E) 2.000 anos.

**7. (INEP-MEC)** Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca Y é

- (A) 20.
- (B) 30.
- (C) 40.
- (D) 50.
- (E) 60.

**8. (INEP-MEC)** No Brasil, mais de 66 milhões de pessoas beneficiam-se hoje do abastecimento de água fluoretada, medida que vem reduzindo, em cerca de 50%, a incidência de cáries. Ocorre, entretanto, que profissionais da saúde muitas vezes prescrevem flúor oral ou complexos vitamínicos com flúor para crianças ou gestantes, levando à ingestão exagerada da substância. O mesmo ocorre com o uso abusivo de algumas marcas de água mineral que contêm flúor. O excesso de flúor — fluorose — nos dentes pode ocasionar desde efeitos estéticos até defeitos estruturais graves. Foram registrados casos de fluorose tanto em cidades com água fluoretada pelos poderes públicos como em outras, abastecidas por lençóis freáticos que naturalmente contêm flúor.

Revista da Associação Paulista de Cirurgiões-Dentistas –APCD, vol. 53, n.º 1, jan./fev. 1999 (adaptado).

Determinada estação trata cerca de 30.000 litros de água por segundo. Para evitar riscos de fluorose, a concentração máxima de fluoretos nessa água não deve exceder a cerca de 1,5 miligrama por litro de água. A quantidade máxima dessa espécie química que pode ser utilizada com segurança, no volume de água tratada em uma hora, nessa estação, é

- (A) 1,5 kg.
- (B) 4,5 kg.
- (C) 96 kg.
- (D) 124 kg.
- (E) 162 kg.

**9. (INEP-MEC)** (ENEM 2012) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava

dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte

dosagem: 5 gotas para cada 2kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

- a) 12 kg.
- b) 16 kg.
- c) 24 kg.
- d) 36 kg.
- e) 75 kg.

**10. (INEP-MEC)** O salto triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Disponível em: [www.cbat.org.br](http://www.cbat.org.br). Acesso em: 27/3/2010 (adaptado).

Um atleta da modalidade salto triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre

- (A) 4,0 m e 5,0 m.
- (B) 5,0 m e 6,0 m.
- (C) 6,0 m e 7,0 m.
- (D) 7,0 m e 8,0 m.
- (E) 8,0 m e 9,0 m.

**11. (INEP-MEC)** Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões ( $10^7$ ) de litros de água potável.

Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas Veja (ed. 2.055), Cláudia (ed. 555), National Geographic (ed. 93) e Nova Escola (ed. 208). Adaptado.

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consumam 1.000 litros de óleo em frituras por semana. Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

- (A)  $10^{-2}$ . (B)  $10^3$ . (C)  $10^4$ . (D)  $10^6$ . (E)  $10^9$ .

**12. (INEP-MEC)** Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e às faixas de normalidade

preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares. As fórmulas que determinam esses índices são:

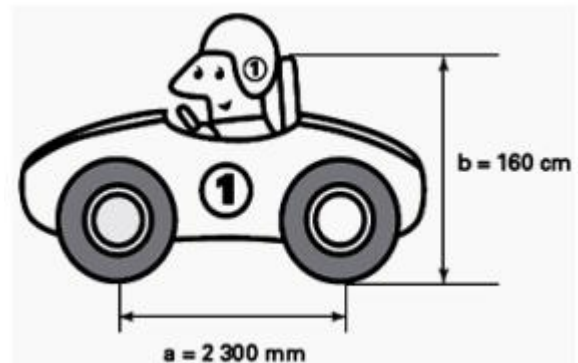
$IMC = \frac{\text{massa (kg)}}{[\text{altura (m)}]^2}$	$RIP = \frac{\text{altura (cm)}}{\sqrt[3]{\text{massa (kg)}}}$
---	--

ARAÚJO, C. G. S.; RICARDO, D. R. Índice de Massa Corporal: Um Questionamento Científico Baseado em Evidências. Arq. Bras. Cardiologia, volume 79, n.º 1, 2002 (adaptado).

Se uma menina, com 64 kg de massa, apresenta IMC igual a  $25 \text{ kg/m}^2$ , então ela possui RIP igual a

- (A)  $0,4 \text{ cm/Kg}^{1/3}$ .
- (B)  $2,5 \text{ cm/Kg}^{1/3}$ .
- (C)  $8 \text{ cm/Kg}^{1/3}$ .
- (D)  $20 \text{ cm/Kg}^{1/3}$ .
- (E)  $40 \text{ cm/Kg}^{1/3}$ .

**13. (INEP-MEC)** Um mecânico de uma equipe de corrida necessita que as seguintes medidas realizadas em um carro sejam obtidas em metros:



- a) distância a entre os eixos dianteiro e traseiro;
- b) altura b entre o solo e o encosto do piloto.

Ao optar pelas medidas a e b em metros, obtêm-se, respectivamente,

- (A) 0,23 e 0,16.
- (B) 2,3 e 1,6.
- (C) 23 e 16.
- (D) 230 e 160.
- (E) 2.300 e 1.600.

**14. (INEP-MEC)** Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2.000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades,

A e B, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de

- (A) 1:250.
- (B) 1:2.500.
- (C) 1:25.000.
- (D) 1:250.000.
- (E) 1:25.000.000.

### 15. (INEP-MEC)

#### Café no Brasil

O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras.

Veja, n.º 2.158, 31/3/2010.

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a, aproximadamente, 120 mL de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando o consumo em do que foi consumido no ano anterior. De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010?

- (A) 8 bilhões de litros.
- (B) 16 bilhões de litros.
- (C) 32 bilhões de litros.
- (D) 40 bilhões de litros.
- (E) 48 bilhões de litros.

**16. (INEP-MEC)** Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1:250. Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

- (A) 4,8 e 11,2.
- (B) 7,0 e 3,0.
- (C) 11,2 e 4,8.
- (D) 28,0 e 12,0.
- (E) 30,0 e 70,0.

**17. (INEP-MEC)** No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, "o maior olho do mundo voltado para o céu".

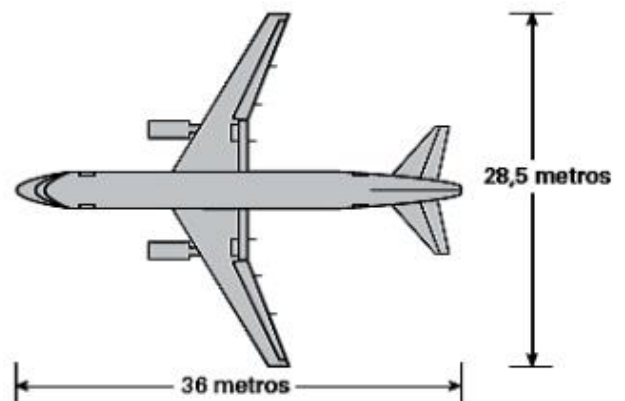
Disponível em: <http://www.estadao.com.br>. Acesso em: 27/4/2010 (adaptado).

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede

aproximadamente 2,1 cm. Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

- (A) 1:20.
- (B) 1:100.
- (C) 1:200.
- (D) 1:1.000.
- (E) 1:2.000.

**18. (INEP-MEC)** A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de 1:150. Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter?



- (A) 2,9 cm x 3,4 cm.
- (B) 3,9 cm x 4,4 cm.
- (C) 20 cm x 25 cm.
- (D) 21 cm x 26 cm.
- (E) 192 cm x 242 cm.

**19. (INEP-MEC)** Álcool, crescimento e pobreza O lavrador de Ribeirão Preto recebe em média R\$ 2,50 por tonelada de cana cortada. Nos anos 80, esse trabalhador cortava cinco toneladas de cana por dia. A mecanização da colheita o obrigou a ser mais produtivo. O corta-cana derruba agora oito toneladas por dia. O trabalhador deve cortar a cana rente ao chão, encurvado. Usa roupas mal-ajambradas, quentes, que lhe cobrem o corpo, para que não seja lanhado pelas folhas da planta. O excesso de trabalho causa a birola: tontura, desmaio, câibra, convulsão. A fim de aguentar dores e cansaço, esse trabalhador toma drogas e soluções de glicose, quando não farinha mesmo. Tem aumentado o número de mortes por exaustão nos canaviais. O setor da cana produz hoje uns 3,5% do PIB. Exporta US\$ 8 bilhões. Gera toda a energia elétrica que consome e ainda vende excedentes. A indústria de São Paulo contrata cientistas e engenheiros



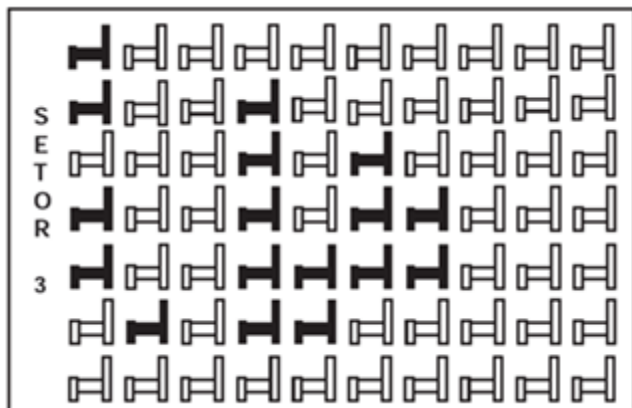
para desenvolver máquinas e equipamentos mais eficientes para as usinas de álcool. As pesquisas, privada e pública, na área agrícola (cana, laranja, eucalipto etc.) desenvolvem a bioquímica e a genética no país.

Folha de S. Paulo, 11/3/2007 (com adaptações).

Considere-se que cada tonelada de cana-de-açúcar permita a produção de 100 litros de álcool combustível, vendido nos postos de abastecimento a R\$ 1,20 o litro. Para que um corta-cana pudesse, com o que ganha nessa atividade, comprar o álcool produzido a partir das oito toneladas de cana resultantes de um dia de trabalho, ele teria de trabalhar durante

- (A) 3 dias.
- (B) 18 dias.
- (C) 30 dias.
- (D) 48 dias.
- (E) 60 dias.

**20. (INEP-MEC)** Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.

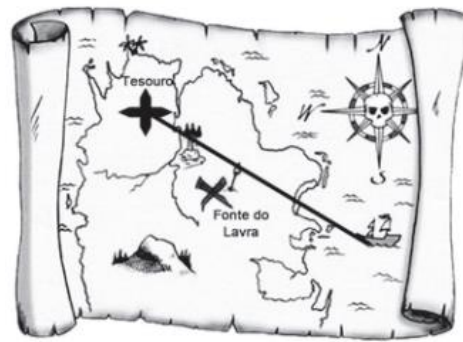


A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é

- (A) 17/10
- (B) 17/53
- (C) 53/70
- (D) 53/17
- (E) 70/17

**21. (INEP-MEC)** Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real.

Certo mapa tem escala 1 : 58 000 000.



Disponível em: <http://ciologdedaynabright.blogspot.com.br>. Acesso em: 9 ago. 2012.

Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça 7,6 cm.

A medida real, em quilômetro, desse segmento de reta é

- 4 408.
- 7 632.
- 44 080.
- 76 316.
- 440 800.

## MÓDULO 2 Aritmética – Proporcionalidade

### Regra de três

Ferramenta fundamental na solução de problemas matemáticos, a regra de três é baseada na proporcionalidade. Com ela, podemos determinar a variação entre duas grandezas que aumentam ou diminuem na mesma proporção. Suponhamos que, no fim de 2000, a passagem de ônibus na cidade de Paranguaçu da Serra custava R\$ 1,25 e o salário mínimo era de R\$ 151,00. Se o salário mínimo no início de 2010 era de R\$ 510,00, qual deveria ser o preço da passagem se o aumento tivesse sido proporcional?

passagem de ônibus	salário mínimo
1,25	151
x	510

Para calcular isso, você precisa fazer primeiro uma multiplicação cruzada:

$$\begin{array}{r|l} 1,25 & 151 \\ x & 510 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1,25 \cdot 510 &= 151 \cdot x \\ 637,5 &= 151x \\ x &= 637,5 : 151 \\ x &= R\$ 4,22 \end{aligned}$$

Se, em 2010, a passagem de ônibus em Paranguaçu da Serra era de R\$ 3,00, verificamos que o aumento da tarifa foi abaixo do aumento do salário mínimo. O valor de R\$ 4,22 representa o preço que a passagem custaria se salário e passagem aumentassem na mesma proporção.

A regra de três também pode ser usada como uma ferramenta útil para calcular porcentagens, que usam sempre a base 100. Calculamos o aumento percentual do salário mínimo entre 2001 e 2009 assim:

$$\begin{array}{r|l} \text{salário mínimo} & \text{percentual} \\ 151 & 100 \\ 465 & x \end{array}$$

$$\begin{aligned} 151 \cdot x &= 465 \cdot 100 \\ 151x &= 46.500 \\ x &= 46.500 : 151 \\ x &= 307,95 \end{aligned}$$

Nessa relação, você determinou que, se o salário mínimo de 2001 equivalia a 100%, o de 2009 equivalerá a 307,95%. Isso não significa que o salário tenha aumentado 307,95%. Significa que o salário de 2001 está para 100% assim como o de 2009 está para 307,95%. Para calcular o aumento, você precisa subtrair o valor final do valor inicial, porque você quer saber quanto ele aumentou em relação ao que já tinha. Assim, o aumento é este:

$$307,95\% - 100\% = 207,95\%$$

O aumento foi de 207,95%. Para cada R\$ 100,00 de salário mínimo em 2001, aumentaram R\$ 207,95. Além dos problemas proporcionais, existem aqueles também que conhecemos como inversamente proporcionais, isto é, aqueles nos quais, ao invés de os dados crescerem proporcionalmente, um cresce e outro decresce em proporção.

Vamos dar um exemplo. Marina havia escolhido um azulejo em formato quadrado para preencher as paredes de seu

banheiro. Havia encomendado 50 caixas para o serviço. No entanto, soube que não estavam mais sendo fabricados os azulejos que queria. Em vez disso, teria de se conformar com azulejos de 10 cm. De quantas caixas ela precisaria agora? Marina tentou resolver o problema com regra de três simples. Colocou os dados em duas colunas e fez o cálculo:

$$\begin{array}{r|l} \text{tamanho do azulejo} & \text{caixas necessárias} \\ 20 & 50 \\ 10 & x \end{array}$$

$$\begin{aligned} 20 \cdot x &= 10 \cdot 50 \\ x &= 500 : 20 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Ela logo percebeu que havia cometido um erro, pois teria de comprar menos se usasse azulejos menores. Logicamente, quando o tamanho do azulejo diminui, o número de caixas deveria aumentar proporcionalmente. Por isso, dizemos ser ele um problema inversamente proporcional. Em vez de multiplicar em cruz, você multiplicará paralelamente.

$$\begin{array}{r|l} \text{tamanho do azulejo} & \text{caixas necessárias} \\ 20 & 50 \\ 10 & x \end{array}$$

$$\begin{aligned} 20 \cdot 50 &= 10 \cdot x \\ x &= 1.000 : 10 \\ x &= 100 \end{aligned}$$

Assim, ela descobriu que deveria usar o dobro de caixas comprando azulejos menores, que é o número correto.

♣ Para fazer comparações entre números e valores, você pode estabelecer as proporções entre eles.

♣ A regra de três é uma ferramenta simples para fazer comparações, que resolve boa parte dos problemas matemáticos que encontramos no dia a dia. Para executá-la, você precisa de três fatores conhecidos (como o salário mínimo em dois anos diferentes e o preço da passagem de ônibus no primeiro) e uma incógnita (como o possível preço futuro da passagem de ônibus). Faça uma multiplicação cruzada, isole a variável e divida.

♣ Razão é a divisão feita para comparar a quantidade de uma coisa com a de outra coisa. Por exemplo, a quantidade de homens e a de mulheres numa festa.

♣ Proporção é a divisão feita para comparar a quantidade de um elemento dentro do total. Por exemplo, a quantidade de mulheres dentro do total de participantes de uma festa.

♣ Percentual é a proporção baseada no número 100, onde 100 é equivalente ao número total, e o percentual calculado é o número derivado, ou parcial. Pode ser descrito como um decimal entre 0 e 1 ou na forma tradicional, um número que é 100 vezes o valor desse decimal.

♣ O ponto, a reta e o plano são os conceitos geométricos primitivos. Essas e outras noções fundamentais da geometria foram sintetizadas pelo matemático Euclides, no terceiro século antes de Cristo, por meio de axiomas — verdades matemáticas aceitas sem contestação.

♣ A reta está presente em muitos dos outros conceitos da geometria, em uma, duas ou três dimensões. Um plano contém infinitas retas. Devidamente posicionadas, as retas podem formar figuras. A reta é um conceito abstrato, de comprimento infinito e que não tem largura nem altura.

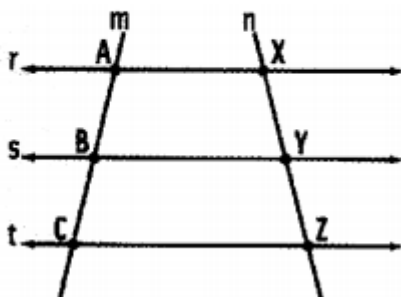
♣ Um segmento de reta começa em um ponto definido e termina em outro ponto definido. A menor distância entre dois pontos é o segmento de reta que os une.

♣ Em duas retas concorrentes, os ângulos formados pelo encontro são chamados de suplementares quando adjacentes um ao outro, e complementares se opostos. Os ângulos complementares são sempre iguais.

♣ A soma de dois ângulos suplementares é sempre 180 graus. A soma de todos os ângulos é 360 graus.

♣ O Teorema de Tales permitiu calcular alturas inacessíveis, considerando a proporcionalidade de triângulos semelhantes. Isso pode ser obtido por meio de uma regra de três simples.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{YZ}}$$



♣ Triângulos são polígonos formados por três lados e cujos ângulos internos sempre somam 180°. Podem ser classificados de duas maneiras.

### 1. Pelo tamanho dos lados:

**Equilátero:** todos os seus lados possuem medidas iguais. **Isósceles:** dois de seus lados têm a mesma medida. **Escaleno:** todos os lados têm medidas diferentes.

### 2. Pelos ângulos:

Triângulo **retângulo:** como sugere o nome, apresenta um ângulo reto.

Triângulo **acutângulo:** todos os ângulos internos são ângulos agudos.

Triângulo **obtusângulo:** tem um ângulo obtuso.

♣ Triângulos são semelhantes quando possuem os três ângulos iguais. Os lados de correspondentes de triângulos semelhantes são proporcionais e podem ser calculados por meio da regra de três.

### Exercícios

**1. (INEP-MEC)** Observe as dicas para calcular a quantidade certa de alimentos e bebidas para as festas de fim de ano:

- Para o prato principal, estime 250 gramas de carne para cada pessoa.
- Um copo americano cheio de arroz rende o suficiente para quatro pessoas.
- Para a farofa, calcule quatro colheres de sopa por convidado.
- Uma garrafa de vinho serve seis pessoas.
- Uma garrafa de cerveja serve duas.
- Uma garrafa de espumante serve três convidados.

Quem organiza festas faz esses cálculos em cima do total de convidados, independente do gosto de cada um. Quantidade certa de alimentos e bebidas evita o desperdício da ceia.

Jornal Hoje, 17/12/2010 (adaptado).

Um anfitrião decidiu seguir essas dicas ao se preparar para receber 30 convidados para a ceia de Natal. Para seguir essas orientações à risca, o anfitrião deverá dispor de

- (A) 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.
- (B) 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.
- (C) 75 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.
- (D) 7,5 kg de carne, 7 copos americanos de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.

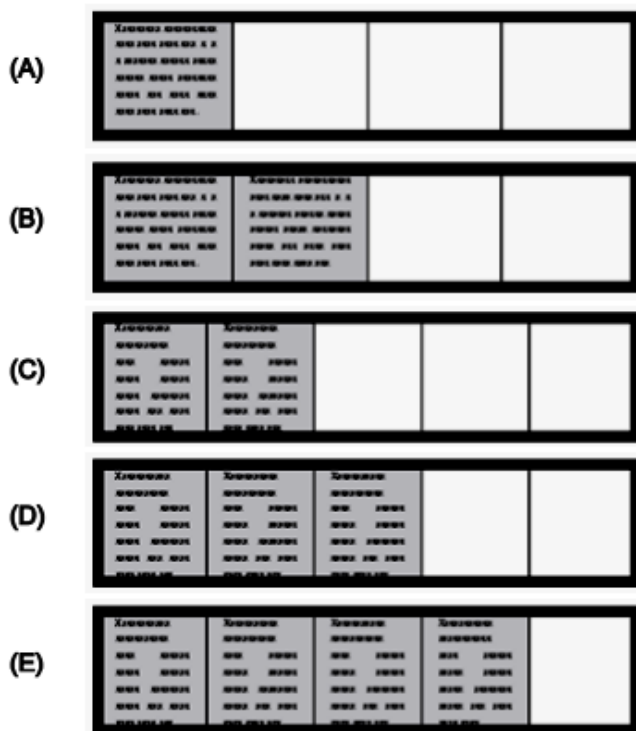
(E) 7,5 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.

**2. (INEP-MEC)** Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte



Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.

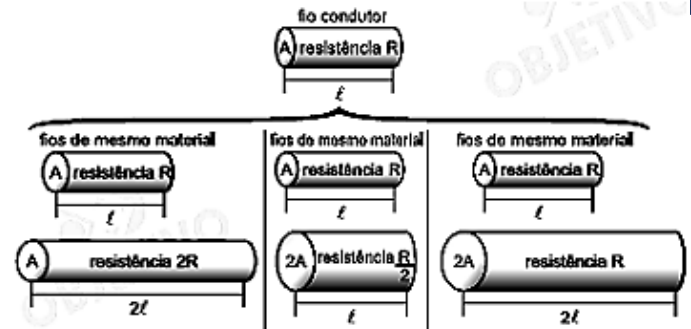
Uma representação possível para essa segunda situação é



**3. (INEP-MEC)** A resistência elétrica e as dimensões do condutor A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência ( $R$ ) e comprimento ( $L$ ), dada a mesma seção transversal ( $A$ );
- resistência ( $R$ ) e área da seção transversal ( $A$ ), dado o mesmo comprimento ( $L$ ) e
- comprimento ( $L$ ) e área da seção transversal ( $A$ ), dada a mesma resistência ( $R$ ).

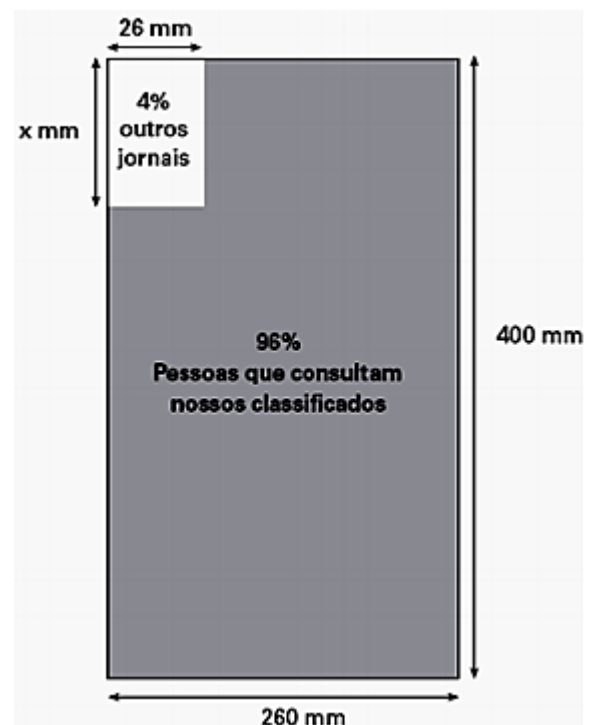
Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.



As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência ( $R$ ) e comprimento ( $L$ ), resistência ( $R$ ) e área da seção transversal ( $A$ ), e entre comprimento ( $L$ ) e área da seção transversal ( $A$ ) são, respectivamente,

- (A) direta, direta e direta.  
(B) direta, direta e inversa.  
(C) direta, inversa e direta.  
(D) inversa, direta e direta.  
(E) inversa, direta e inversa.

**4. (INEP-MEC)** O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados



Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4%, deve ser de aproximadamente

- (A) 1 mm.  
(B) 10 mm.  
(C) 17 mm.  
(D) 160 mm.



**5. (INEPMEC)** A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

Veja, ano 41, n.º 25, 25/6/2008 (adaptado).

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

(A) 406. (B) 1.334. (C) 4.002. (D) 9.338. (E) 28.014.

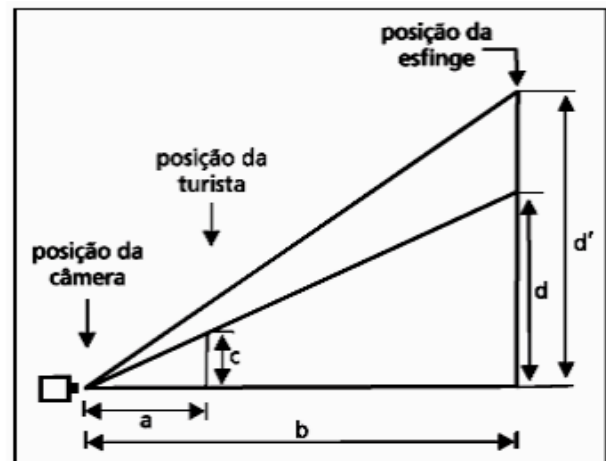
**6. (ENEM-MEC)** A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

(A) 1,16 metros.  
(B) 3,0 metros.  
(C) 5,4 metros.  
(D) 5,6 metros.  
(E) 7,04 metros.

**7. (ENEM-MEC)** Uma cooperativa de colheita propôs a um fazendeiro um contrato de trabalho nos seguintes termos: a cooperativa forneceria 12 trabalhadores e 4 máquinas, em um regime de trabalho de 6 horas diárias, capazes de colher 20 hectares de milho por dia, ao custo de R\$ 10,00 por trabalhador por dia de trabalho, e R\$ 1.000,00 pelo aluguel diário de cada máquina. O fazendeiro argumentou que fecharia contrato se a cooperativa colhesse 180 hectares de milho em 6 dias, com gasto inferior a R\$ 25.000,00. Para atender às exigências do fazendeiro e supondo que o ritmo dos trabalhadores e das máquinas seja constante, a cooperativa deveria

(A) manter sua proposta.  
(B) oferecer 4 máquinas a mais.  
(C) oferecer 6 trabalhadores a mais.  
(D) aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.  
(E) reduzir em R\$ 400,00 o valor do aluguel diário de uma máquina.

**8. (ENEM-MEC)** A fotografia mostra uma turista aparentemente beijando a esfinge de Gizé, no Egito. A figura a seguir mostra como, na verdade, foram posicionadas a câmera fotográfica, a turista e a esfinge.



Medindo-se com uma régua diretamente na fotografia, verifica-se que a medida do queixo até o alto da cabeça da turista é igual a  $\frac{2}{3}$  da medida do queixo da esfinge até o alto da sua cabeça. Considere que essas medidas na realidade são representadas por  $d$  e  $d'$ , respectivamente, que a distância da esfinge à lente da câmera fotográfica, localizada no plano horizontal do queixo da turista e da esfinge, é representada por  $b$ , e que a distância da turista à mesma lente, por  $a$ .

A razão entre  $b$  e  $a$  será dada por

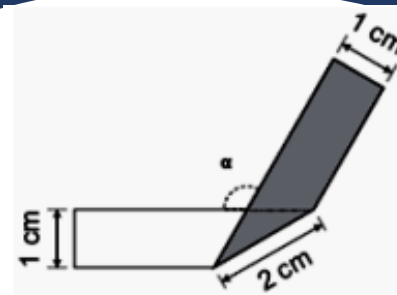
(A)  $\frac{b}{a} = \frac{d'}{c}$  (D)  $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{3c}$

(B)  $\frac{b}{a} = \frac{2d}{3c}$  (E)  $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{c}$

(C)  $\frac{b}{a} = \frac{3d'}{2c}$

**9. (ENEM-MEC)** Rotas aéreas são como pontes que ligam cidades, estados ou países. O mapa a seguir mostra os estados brasileiros e a localização de algumas capitais identificadas pelos números. Considere que a direção seguida por um avião AI que partiu de Brasília-DF, sem escalas, para Belém, no Pará, seja um segmento de reta com extremidades em DF e em 4.





Uma tira de papel retangular, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura. Qual é a medida do ângulo  $\alpha$ ?

- (A)  $110^\circ$ . (B)  $115^\circ$ . (C)  $120^\circ$ . (D)  $125^\circ$ . (E)  $130^\circ$

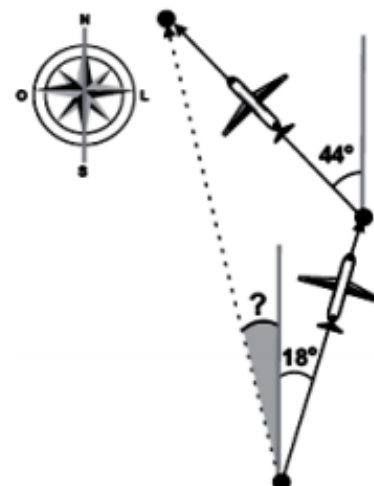
14

**11. (OBMEP-MEC)** A figura mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?



- (A)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{3}{4}$  (E)  $\frac{9}{16}$   
(B)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{3}{8}$

**12. (OBMEP-MEC)** A figura mostra dois trechos de 300 km cada um percorridos por um avião. O primeiro trecho faz um ângulo de  $18^\circ$  com a direção norte e o segundo, um ângulo de  $44^\circ$ , também com a direção norte. Se o avião tivesse percorrido o trecho assinalado em pontilhado, qual seria o ângulo desse trecho com a direção norte?

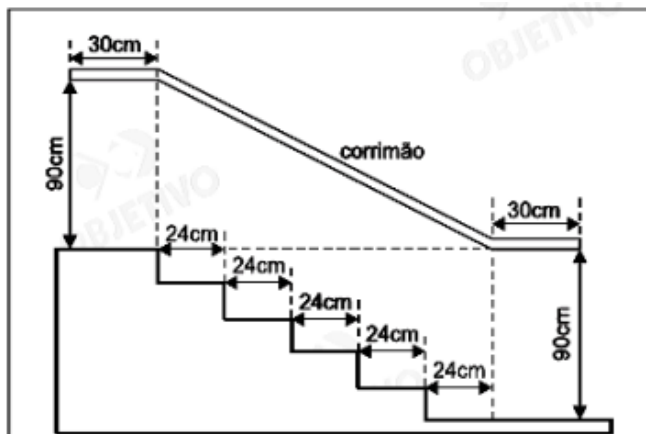


Suponha que um passageiro de nome Carlos pegou um avião AII, que seguiu a direção que forma um ângulo de  $135^\circ$  no sentido horário com a rota Brasília-Belém e pousou em alguma das capitais brasileiras. Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião AIII, que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no sentido anti-horário, com a direção seguida pelo avião AII ao partir de Brasília-DF. Considerando que a direção seguida por um avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião, pela descrição dada, o passageiro Carlos fez uma conexão em

- (A) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Curitiba.  
(B) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Salvador.  
(C) Boa Vista, e em seguida embarcou para Porto Velho.  
(D) Goiânia, e em seguida embarcou para o Rio de Janeiro.  
(E) Goiânia, e em seguida embarcou para Manaus.

**10. (OBMEP-MEC)**

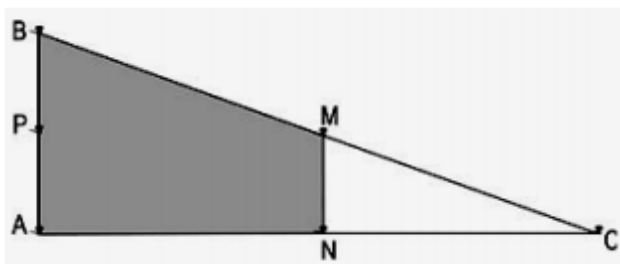
**13. (ENEM-MEC)**



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

- (A) 1,8 m. (B) 1,9 m. (C) 2,0 m. (D) 2,1 m. (E) 2,2 m.

**14. (ENEM-MEC)** Em canteiros de obras de construção civil, é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

- (A) à mesma área do triângulo AMC.  
(B) à mesma área do triângulo BNC.  
(C) à metade da área formada pelo triângulo ABC.  
(D) ao dobro da área do triângulo MNC.  
(E) ao triplo da área do triângulo MNC.

**15. (UEL-PR)** Os primeiros relógios baseavam-se no aparente movimento do Sol na abóboda celeste e no

deslocamento da sombra projetada sobre a superfície de um corpo iluminado pelo astro.

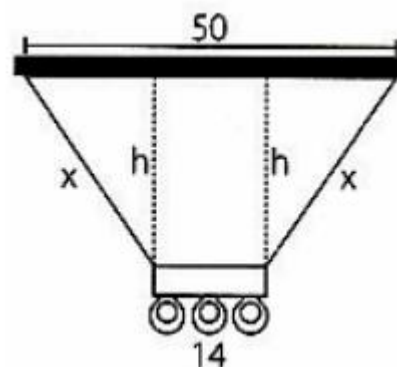
Considere que: a Terra é esférica e seu período de rotação é de 24 horas no sentido oeste-leste; o tempo gasto a cada  $15^\circ$  de rotação é de 1 hora; o triângulo Brasília/Lusaka/Centro da Terra forma, em seu vértice central, um ângulo de  $75^\circ$



A hora marcada em Lusaka, num relógio solar, quando o Sol está a pino em Brasília é:

- (A) 5 horas. (B) 9 horas. (C) 12 horas. (D) 17 horas.  
(E) 21 horas.

**16. (FAAP-SP)**



Uma luminária está suspensa por dois fios presos ao teto. Sabendo-se que o perímetro da figura geométrica resultante é 124 cm, a distância da luminária ao teto é:

- (A) 30 cm. (B) 20 cm. (C) 50 cm. (D) 24 cm. (E) 10 cm.

**17. (UNESP)** Para trocar uma lâmpada, Roberto encostou uma escada na parede de sua casa. Um expert em Matemática, Roberto notou que o topo da escada ficou a uma altura de aproximadamente  $\sqrt{14}$  m. Enquanto subia os degraus, a base da escada escorregou 1 m para trás, parando num entalhe na parede, o que o salvou de um tombo pior e uma passagem no hospital. Refeito do susto, Roberto reparou que, após deslizar, a escada passou a

fazer um ângulo  $45^\circ$  de com a horizontal. Pode-se afirmar que o comprimento da escada é de:

- A)  $\sqrt{18}$  m
- B)  $\sqrt{16}$  m
- C)  $\sqrt{14}$  m
- D)  $\sqrt{20}$  m
- E)  $\sqrt{22}$  m

**18. (ENEM-MEC)** Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para  $900 \text{ m}^3$ . Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de  $500 \text{ m}^3$ , cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

- a) 2.
- b) 4.
- c) 5.
- d) 8.
- e) 9

**19. (ENEM-MEC)** Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de

- a) 920 kg.
- b) 800 kg.
- c) 720 kg.
- d) 600 kg.
- e) 570 kg.

**20. (ENEM-MEC)** Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

- a) 12 kg.
- b) 16 kg.
- c) 24 kg.
- d) 36 kg.
- e) 75 kg.

### Módulo 3- Sequências.

#### ♣ Progressão aritmética

♣ Uma sucessão aritmética é também chamada de Progressão Aritmética se a diferença entre seus termos consecutivos for constante ( $r$ =razão).

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$$

$$a_2 = a_1 + 1.r$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$$

♣ Podemos deduzir seu **termo geral**::

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Dessa fórmula, temos que:

→  $a_n$  é o termo de ordem  $n$  ( $n$ -ésimo termo);

→  $r$  é a razão;

→  $a_1$  é o primeiro termo da Progressão Aritmética – PA.

→  $n$  é a quantidade de termos da sequência.

#### ♣ Propriedades de uma PA

**1ª Propriedade:** Em toda Progressão Aritmética (PA), um termo qualquer, excluindo-se os extremos, é média aritmética entre o seu antecedente e o seu consequente. Desta forma na P.A. temos:

$$(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n)$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

Exemplo: P.A. = (1,3,5,7,9,11,...)

$$\Rightarrow 5 = \frac{3+7}{2}; 9 = \frac{7+11}{2}; \text{etc.}$$

**2ª Propriedade:** Em toda P.A. limitada, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. Na P.A. ( $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ ) temos  $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots \text{etc.}$

Exemplo: PA (1,2,3,...98, 99, 100)

$$\Rightarrow \text{Temos: } 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 1 + 100.$$

#### ♣ Soma dos termos uma Progressão Aritmética (P.A.)

$$S = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Dessa fórmula, temos que:

→  $S$  é a soma dos  $n$  termos;

→  $a_1$  é o primeiro termo da Progressão Aritmética – PA.

→  $n$  é a quantidade de termos da sequência.

→  $a_n$  é o último termo a ser somado da Progressão Aritmética – PA.

#### ♣ Progressão geométrica

♣ Uma sucessão aritmética é também chamada de Progressão geométrica se o quociente entre seus termos consecutivos for constante ( $q$ =razão).



♣ Exemplos:

(1,2,4,8,16,32, ...) PG de razão 2  
(5,5,5,5,5,5, ...) PG de razão 1  
(100,50,25, ...) PG de razão 1/2  
(2,-6,18,-54,162, ...) PG de razão -3

♣  $a^2 = a_1 \cdot q$

$a^3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \rightarrow a_1 \cdot q^2$

♣ Podemos deduzir seu **termo geral**::  
 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Dessa fórmula, temos que:

→  $a_n$  é o termo de ordem  $n$  ( $n$ -ésimo termo);  
→  $q$  é a razão;  
→  $a_1$  é o primeiro termo da Progressão Aritmética – PA.  
→  $n$  é a quantidade de termos da sequência.

♣ Propriedades principais

**Propriedade 1** - em toda PG, um termo é a média geométrica dos termos imediatamente anterior e posterior.

Exemplo: PG (A,B,C,D,E,F,G)

Temos então:  $B^2 = A \cdot C$ ;  $C^2 = B \cdot D$ ;  $D^2 = C \cdot E$ ;  
 $E^2 = D \cdot F$  etc.

**Propriedade 2** - o produto dos termos equidistantes dos extremos de uma PG é constante.

Exemplo: PG (A,B,C,D,E,F,G)

Temos então:  $A \cdot G = B \cdot F = C \cdot E = D \cdot D = D^2$

♣ **Soma dos finitos termos de uma progressão geométrica (P.G.)**

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Dessa fórmula, temos que:

→  $S$  é a soma dos  $n$  termos;  
→  $a_1$  é o primeiro termo da Progressão Geométrica – PG.  
→  $n$  é a quantidade de termos da sequência.  
→  $q$  é a razão da progressão Geométrica-PG.

♣ Soma dos termos de uma PG decrescente e **ilimitada**:  
Considere uma PG ILIMITADA ( infinitos termos) e decrescente. Nestas condições, podemos considerar que no limite teremos  $an = 0$ . Substituindo na fórmula anterior, encontraremos:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Dessa fórmula, temos que:

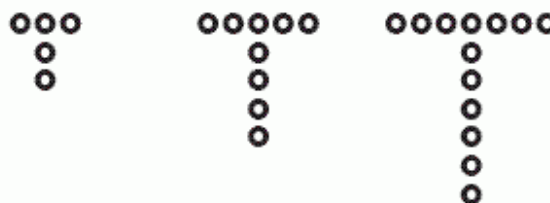
→  $S$  é a soma dos **INFINITOS TERMOS**;

→  $a_1$  é o primeiro termo da Progressão Geométrica – PG..

→  $q$  é a razão da progressão Geométrica-PG.

## EXERCÍCIOS

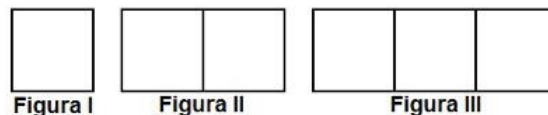
**01. (UFMG)** Tisiu ficou sem parceiro para jogar bola de gude; então pegou sua coleção de bolas de gude e formou uma sequência de "T" (a inicial de seu nome), conforme a figura



Supondo que o guri conseguiu formar 10 "T" completos, pode-se, seguindo o mesmo padrão, afirmar que ele possuía:

- (A) exatamente 41 bolas de gude.
- (B) menos de 220 bolas de gude.
- (C) pelo menos 230 bolas de gude.
- (D) mais de 300 bolas de gude.
- (E) exatamente 300 bolas de gude.

**02. (INEP-MEC)** Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir:



Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

- (A)  $C = 4Q$ .
- (B)  $C = 3Q + 1$ .
- (C)  $C = 4Q - 1$
- (D)  $C = Q + 3$ .
- (E)  $C = 4Q - 2$ .

**03. (INEP-MEC)** As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeto da Produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de  
(A) 497,25.  
(B) 500,85.  
(C) 502,87.  
(D) 558,75.  
(E) 563,25.

**04. (INEP-MEC)** O trabalho em empresas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal.

Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

☆ ☆☆ ☆☆☆ ☆☆☆☆ ☆☆☆☆☆ ...  
1ª 2ª 3ª 4ª 5ª 150ª

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

- Funcionário I: aproximadamente 200 estrelas.
- Funcionário II: aproximadamente 6 000 estrelas.
- Funcionário III: aproximadamente 12 000 estrelas.
- Funcionário IV: aproximadamente 22 500 estrelas.
- Funcionário V: aproximadamente 22 800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

- (A) I  
(B) II  
(C) III  
(D) IV  
(E) V

**05. (INEP-MEC)** O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

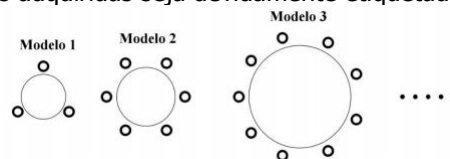
- (A) 38 000  
(B) 40 500  
(C) 41 000  
(D) 42 000  
(E) 48 000

**06. (INEP-MEC)** Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é

- (A) 21.  
(B) 24.  
(C) 26.

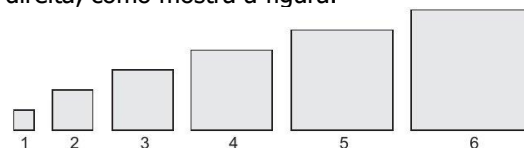
- (D) 28.  
(E) 31.

**07. (IFPE)** Na fabricação de mesas de reunião, uma fábrica trabalha com vários modelos e tamanhos. As mesas redondas são todas acompanhadas com uma certa quantidade de poltronas a depender do tamanho da mesa, conforme a figura abaixo: O primeiro modelo acompanha 3 poltronas, o segundo modelo acompanha 6 poltronas, o terceiro, 9 poltronas e assim sucessivamente, isto é, sempre um modelo de mesa acompanha 3 poltronas a mais em relação ao modelo anterior. Um cliente adquiriu uma unidade de cada um dos 10 primeiros modelos de mesa circular. Como todo patrimônio da sua empresa é identificado a partir de uma etiqueta adesiva, quantos adesivos devem ser confeccionados para que cada uma das mesas e poltronas adquiridas seja devidamente etiquetada?



- (A) 165  
(B) 175  
(C) 30  
(D) 40  
(E) 10

**08. (INEP-MEC)** Em um trabalho escolar, João foi convidado a calcular as áreas de vários quadrados diferentes, dispostos na sequência, da esquerda para a direita, como mostra a figura.



O primeiro quadrado da sequência tem lado medindo 1 cm, o segundo quadrado tem lado medindo 2 cm, o terceiro quadrado tem lado medindo 3 cm e assim por diante. O objetivo do trabalho é identificar em quanto a área de cada quadrado da sequência excede a área do quadrado anterior. A área do quadrado que ocupa a posição  $n$ , na sequência foi representada por  $A_n$ .

Para  $n \geq 2$ , o valor da diferença  $A_n - A_{n-1}$ , em centímetro quadrado, é igual a

- (A)  $2n - 1$   
(B)  $2n + 1$   
(C)  $-2n + 1$   
(D)  $(n - 1)^2$   
(E)  $n^2 - 1$

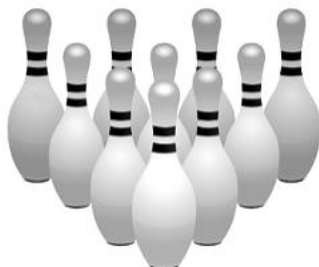
**09. (INEP-MEC)** O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número

- (A) 32.  
(B) 34.  
(C) 33.  
(D) 35.



**10. (PUCCAMP)** Um jogo de boliche é jogado com 10 pinos dispostos em quatro linhas, como mostra a figura abaixo. Se fosse inventado um outro jogo, semelhante ao boliche, no qual houvesse um número maior de pinos, dispostos da mesma forma, e ao todo com 50 linhas, o número de pinos necessários seria igual a



- (A) 1125.
- (B) 2525.
- (C) 2550.
- (D) 1625.
- (E) 1275.

**11. (INEP-MEC)** Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro.

Qual é o número de andares desse edifício?

- (A) 40
- (B) 60
- (C) 100
- (D) 115
- (E) 120

**12. (INEP-MEC)** Com o objetivo de trabalhar a concentração e a sincronia de movimentos dos alunos de uma de suas turmas, um professor de educação física dividiu essa turma em três grupos (A, B e C) e estipulou a seguinte atividade: os alunos do grupo A deveriam bater palmas a cada 2 s, os alunos do grupo B deveriam bater palmas a cada 3 s e os alunos do grupo C deveriam bater palmas a cada 4 s.

O professor zerou o cronômetro e os três grupos começaram a bater palmas quando ele registrou 1 s. Os movimentos prosseguiram até o cronômetro registrar 60 s.

Um estagiário anotou no papel a sequência formada pelos instantes em que os três grupos bateram palmas simultaneamente.

Qual é o termo geral da sequência anotada?

- (A)  $12n$ , com  $n$  um número natural, tal que  $1 \leq n \leq 5$ .
- (B)  $24n$ , com  $n$  um número natural, tal que  $1 \leq n \leq 2$ .
- (C)  $12(n-1)$ , com  $n$  um número natural, tal que  $1 \leq n \leq 6$ .
- (D)  $12(n-1)+1$ , com  $n$  um número natural, tal que  $1 \leq n \leq 5$ .
- (E)  $24(n-1)+1$ , com  $n$  um número natural, tal que  $1 \leq n \leq 3$ .

**13. (INEP-MEC)** Segundo teorias demográficas, a população mundial crescerá em ritmo rápido, comparado a uma  $PG = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots, a_t, \dots)$ , e a produção mundial de alimentos crescerá em um ritmo lento, comparado a uma  $PA = (1, 2, 3, 4, \dots, b_t, \dots)$ .

Suponha que  $PA$  seja a sequência que representa a quantidade de alimentos, em toneladas, produzidos no tempo  $t > 0$ , e que  $PG$  seja a sequência que representa o número de habitantes de uma determinada região, nesse mesmo tempo  $t$ .

A partir dessas informações, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a razão entre a quantidade de alimentos, em kg, e o número de habitantes, para  $t = 10$  anos.

- (A)  $\frac{5^3}{2^6}$
- (B)  $\frac{5^4}{2^6}$
- (C)  $\frac{5^5}{2^6}$
- (D)  $\frac{5^3}{2^5}$
- (E)  $\frac{5^4}{2^5}$

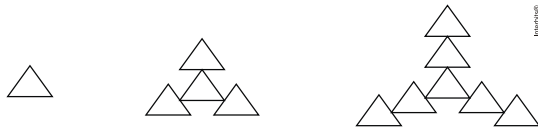
**14. (INEP-MEC)** Um ciclista participará de uma competição e treinará alguns dias da seguinte maneira: no primeiro dia, pedalará 60 km; no segundo dia, a mesma distância do primeiro mais  $r$  km; no terceiro dia, a mesma distância do segundo mais  $r$  km; e, assim, sucessivamente, sempre pedalando a mesma distância do dia anterior mais  $r$  km. No último dia, ele deverá percorrer 180 km, completando o treinamento com um total de 1560 km.

A distância  $r$  que o ciclista deverá pedalar a mais a cada dia, em km, é

- (A) 3.
- (B) 7.
- (C) 10.
- (D) 13.
- (E) 20.

15. (INEP-MEC) Num laboratório está sendo

realizado um estudo sobre a evolução de uma população de vírus. A seguinte sequência de figuras representa os três primeiros minutos da reprodução do vírus (representado por um triângulo).



Supondo que se mantém constante o ritmo de desenvolvimento da população de vírus, qual o número de vírus após uma hora?

- (A) 140
- (B) 180
- (C) 178
- (D) 240
- (E) 537

16. (INEP-MEC) Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino. Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,

- (A) 12 dias.
- (B) 13 dias.
- (C) 14 dias.
- (D) 15 dias.
- (E) 16 dias.

# RASCUNHOS

21



Daniel França  
matemática

# RASCUNHOS

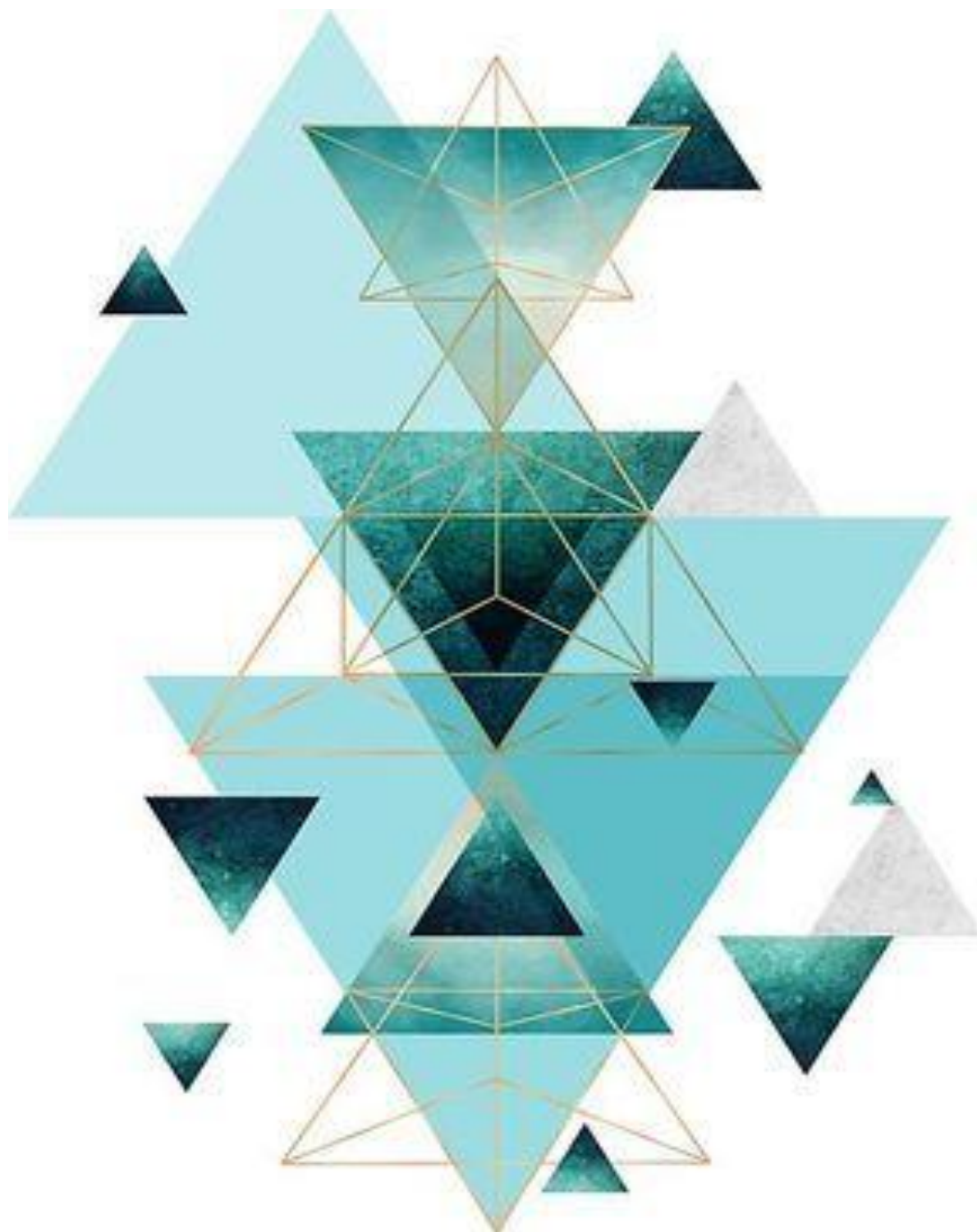
22



Daniel França  
matemática

# GEOMETRIA PLANA

23

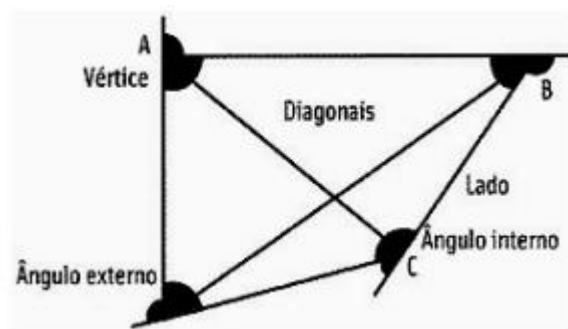




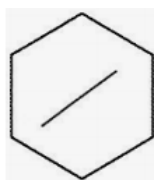
## MÓDULO 1: Geometria Plana— Polígonos e algumas constatações sobre superfícies de figuras...

Chamamos de polígonos a toda forma geométrica plana de contorno fechado, constituído de segmentos de retas que não se cruzam. Já estudamos um caso particular de polígono, o mais simples dele, que é o triângulo. Não existem polígonos com menos de três lados, pois é preciso no mínimo três linhas retas para fechar um contorno. Todo polígono tem os seguintes elementos:

- ♣ Lado: é o nome dado a cada segmento de reta.
- ♣ Vértice: é o ponto de encontro entre dois segmentos consecutivos (lados).
- ♣ Ângulos internos: é o ângulo da parte interna da região formada por dois lados consecutivos.
- ♣ Ângulo externo: é o ângulo exterior a cada ângulo interno.
- ♣ Diagonal: segmento de reta que liga cada vértice a todos os outros, exceto seus vizinhos consecutivos.



- ♣ Forma: um polígono pode ser côncavo ou convexo. Convexo: quando qualquer segmento de reta que você desenhe dentro do polígono, se tiver as duas extremidades dentro dele, também fica inteiro do lado de dentro. Isto é, não dá para começar uma linha reta do polígono e ela ficar com uma parte para fora.



Côncavo: é possível desenhar um segmento de reta começando e terminando dentro do polígono, mas que tem uma parte para fora. O polígono é "afundado"

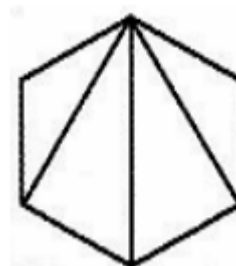


Observe que, em um polígono, o número de lados é igual ao número de vértices, e podemos calcular a quantidade de diagonais pela expressão:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

onde  $n$  é o número de lados do polígono.

Para conhecer a soma dos ângulos internos de um polígono, podemos reparti-lo em diversos triângulos. Como cada vértice está conectado a dois outros vértices, o número de triângulos obtidos é igual ao número de lados ( $n$ ) menos 2.



Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , basta fazermos:  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ . No caso do hexágono demonstrado temos  $(6 - 2) \cdot 180^\circ$ , ou  $720^\circ$ .

ALGUNS NOMES DE POLÍGONOS	
Nome	Número de lados
triângulo	3
quadrilátero	4
pentágono	5
hexágono	6
heptágono	7
octógono	8
eneágono	9

### • Os triângulos...

♣ Áreas de triângulos, no geral, podem ser calculadas por meio da fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

- Se ligue na fórmula de Heron

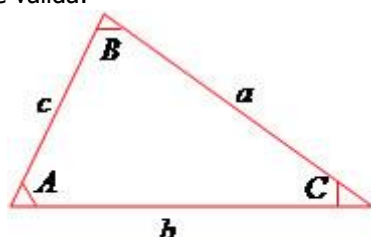


$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$A = \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

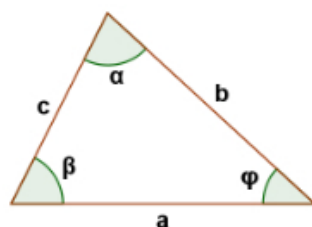
♣ **Teorema de Pitágoras** é o nome dado à proposição utilizada desde a Grécia antiga para calcular a hipotenusa: o quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos catetos. Assim, para a hipotenusa "a" e catetos "b" e "c", temos:  $a^2 = b^2 + c^2$

♣ Para **qualquer triângulo**, a relação de **lei dos senos** será sempre válida:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

♣ Para **qualquer triângulo**, a relação de **lei dos cossenos** será sempre válida:

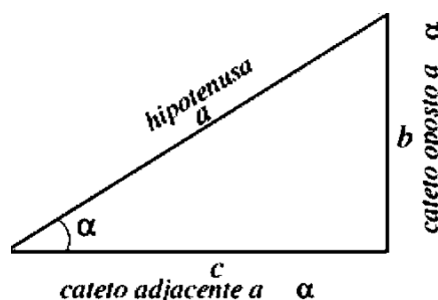


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \varphi$$

Para qualquer **triângulo retângulo**, também teremos as seguintes **relações trigonométricas**:



$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

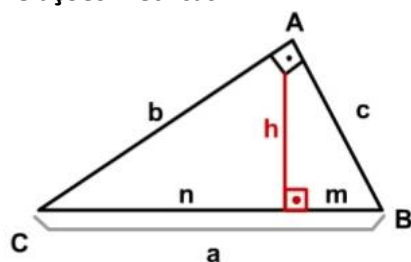
$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

#### ÂNGULOS NOTÁVEIS

	30°	45°	60°
SENO	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COSSENO	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TANGENTE	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

♣ Para qualquer **triângulo retângulo**, teremos as seguintes **relações métricas**:



$$a \cdot h = b \cdot c$$

$$b^2 = a \cdot n$$

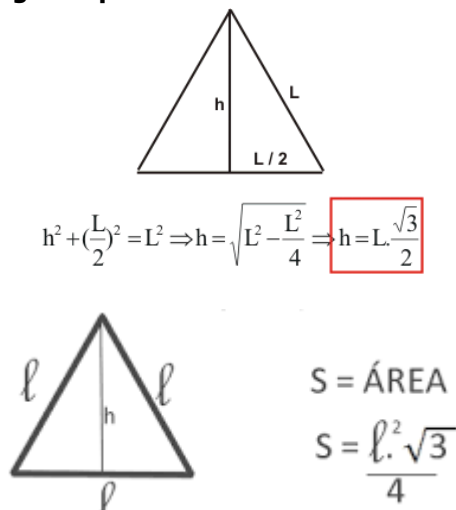
$$c^2 = a \cdot m$$

$$h^2 = m \cdot n$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

]

♣ O triângulo equilátero:



♣ Polígonos são figuras planas formadas por uma região cercada por linhas retas, dando origem a um número de ângulos igual ao de lados e vértices.

♣ Ângulos externos são os ângulos medidos do lado de fora da figura, estendendo-se a reta de um lado adjacente (será o suplemento do ângulo interno correspondente). A soma de um grupo de ângulos externos de um polígono é sempre 360 graus.

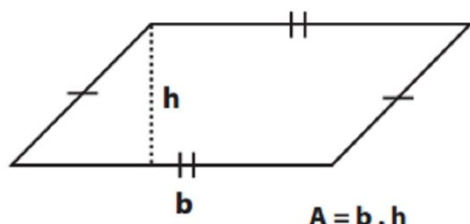
♣ Polígonos podem ser convexos ou côncavos. Eles são côncavos quando um de seus vértices está na parte interna da figura. No convexo, todo segmento de reta, cujas extremidades se encontrem no interior do polígono, está totalmente contido no polígono.

Polígonos podem ser divididos em triângulos, e essa é uma forma de calcular sua área. O número de triângulos em que podem ser divididos a partir de um vértice é igual ao de lados menos 2.

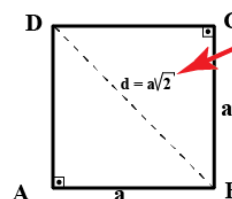
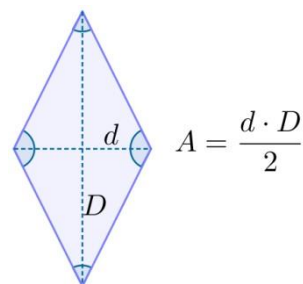
♣ Polígonos regulares têm lados e ângulos iguais. Eles podem ser inscritos em um círculo, ou ter um círculo inscrito nos seus lados internos.

♣ Quadriláteros são polígonos de quatro lados. Eles podem ser quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios ou losangos, ou ter formas irregulares.

♣ Um retângulo é um paralelogramo com ângulos retos, mas nem todo **paralelogramo** é um retângulo.

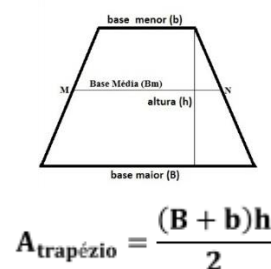


♣ Um quadrado é um retângulo de lados iguais e também um losango de ângulos retos, mas nem todo retângulo ou **losango** é um quadrado.



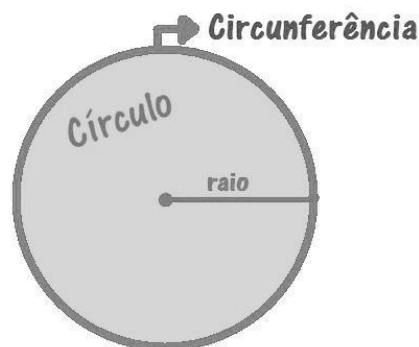
♣ A área do paralelogramo, do retângulo e do losango é dada por base vezes altura. A área do quadrado é igual à altura ao quadrado.

♣ A área do trapézio é dada por base menor mais base maior vezes altura, dividido por dois:



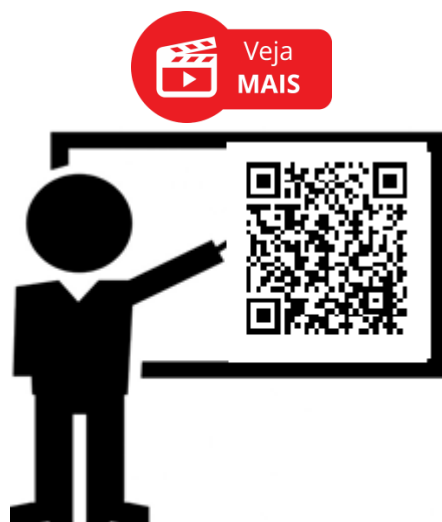
♣ Para se obter a área de quadriláteros de ângulos e lados irregulares, podemos dividi-los em triângulos.

♣ A ideia da superfície no círculo e perímetro da circunferência...

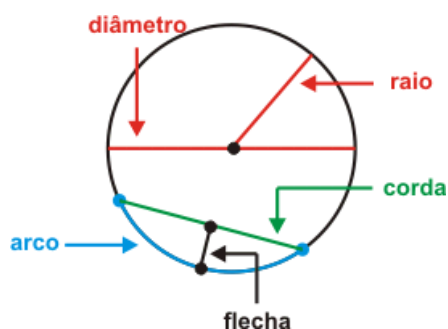


$$C = 2 \cdot \pi \cdot R$$

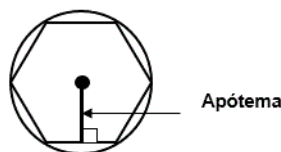
$$A_O = \pi \cdot R^2$$



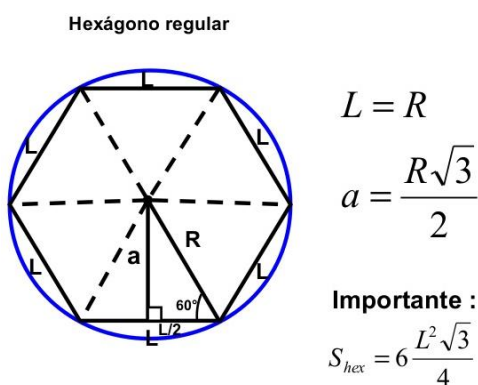
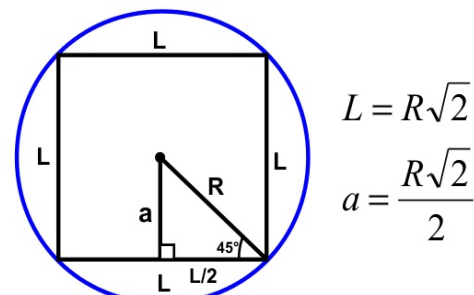
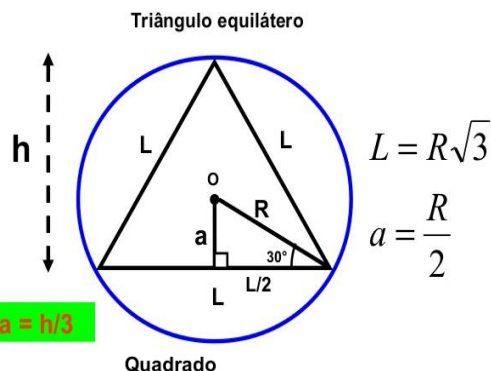
♣ Os elementos da circunferência:



♣ Considerando um círculo e um polígono inscrito de  $n$  lados, definimos como **apótema** de uma figura poligonal o segmento de reta que parte do centro da figura formando com o lado um ângulo de  $90^\circ$ .



O Apótema é sempre **perpendicular** ao lado



### Exercícios

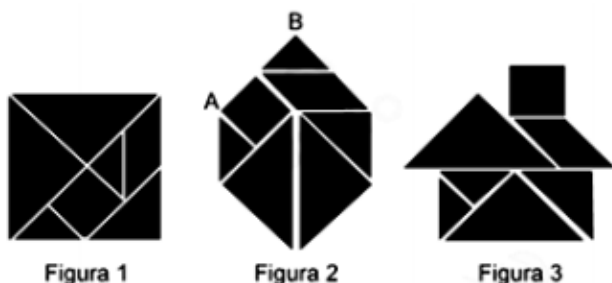
**1. (ENEM-MEC)** Suponha que, na escultura do artista Emanuel Araújo, mostrada na figura a seguir, todos os prismas numerados em algarismos romanos são retos, com bases triangulares, e que as faces laterais do poliedro II são perpendiculares à sua própria face superior, que, por sua vez, é um triângulo congruente ao triângulo base dos prismas. Além disso, considere que os prismas I e III são perpendiculares ao prisma IV e ao poliedro II.



Imagine um plano paralelo à face do prisma I, mas que passe pelo ponto P pertencente à aresta do poliedro II, indicado na figura. A interseção desse plano imaginário com a escultura contém

- (A) dois triângulos congruentes com lados correspondentes paralelos.
- (B) dois retângulos congruentes e com lados correspondentes paralelos.
- (C) dois trapézios congruentes com lados correspondentes perpendiculares.
- (D) dois paralelogramos congruentes com lados correspondentes paralelos.
- (E) dois quadriláteros congruentes com lados correspondentes perpendiculares.

**2. (ENEM-MEC)** O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

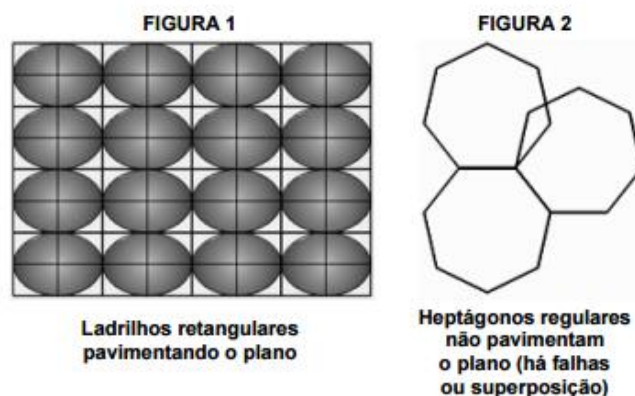


Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

- (A) 4 cm<sup>2</sup>.
- (B) 8 cm<sup>2</sup>.

- (C) 12 cm<sup>2</sup>.
- (D) 14 cm<sup>2</sup>.
- (E) 16 cm<sup>2</sup>.

**3. (ENEM-MEC)** Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:



A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono
Figura			
Ângulo interno	60°	90°	108°

Nome	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura			
Ângulo interno	120°	135°	140°

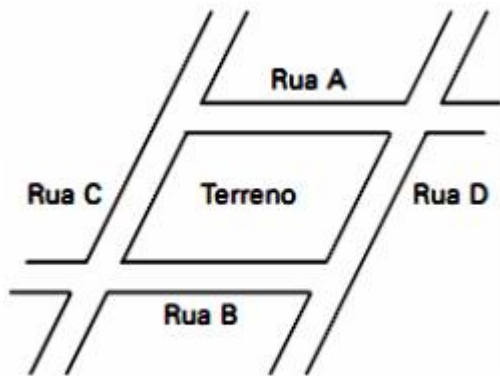
Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

- (A) triângulo.
- (B) quadrado.
- (C) pentágono.
- (D) hexágono.
- (E) eneágono.

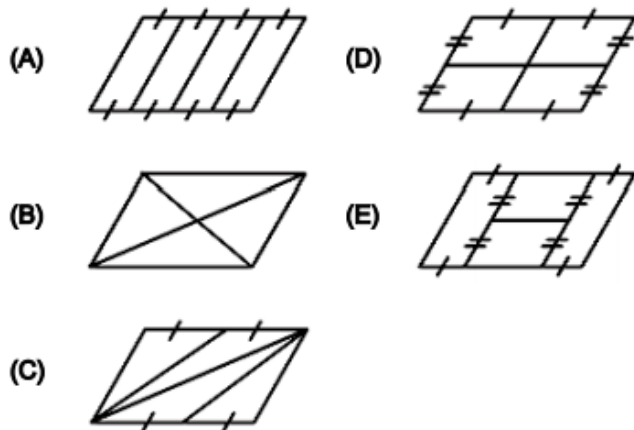
**4. (ENEM-MEC)** Um terreno com o formato mostrado na figura foi herdado por quatro irmãos e deverá ser dividido em quatro lotes de mesma área. Um dos irmãos fez algumas propostas de divisão para que fossem analisadas pelos demais herdeiros.



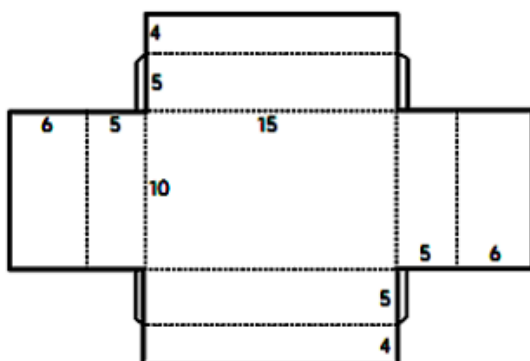
Dos esquemas abaixo, onde lados de mesma medida têm símbolos iguais, o único em que os quatro lotes não possuem, necessariamente, a mesma área é



As ruas A e B são paralelas.  
As ruas C e D são paralelas.



**5. (ENEM-MEC)** Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.

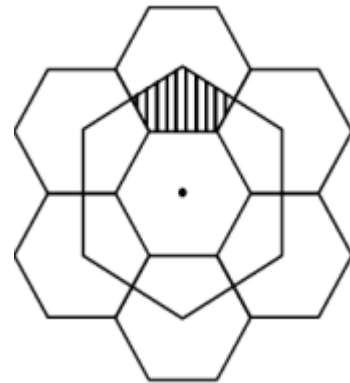


Os sólidos são fabricados nas formas de I. um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5 cm. II. um cubo de aresta 2 cm. III. uma esfera de raio 1,5 cm. IV. um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm. V. um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm. O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela

abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos

- (A) I, II e III.
- (B) I, II e V.
- (C) I, II, IV e V.
- (D) II, III, IV e V.
- (E) III, IV e V.

**6. (FUVEST-SP)** A figura representa sete hexágonos regulares de lado 1 e um hexágono maior, cujos vértices coincidem com os centros de seis dos hexágonos menores. Então, a área do pentágono hachurado é igual a



- A)  $3\sqrt{3}$
- B)  $\frac{3\sqrt{3}}{3}$
- C)  $2\sqrt{3}$
- D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- E)  $\sqrt{3}$

**7. (ENEM-MEC)** No calendário utilizado atualmente, os anos são numerados em uma escala sem o zero, isto é, não existe o ano zero. A era cristã se inicia no ano 1 depois de Cristo (d.C.) e designa-se o ano anterior a esse como ano 1 antes de Cristo (a.C.). Por essa razão, o primeiro século ou intervalo de 100 anos da era cristã terminou no dia 31 de dezembro do ano 100 d.C., quando haviam decorrido os primeiros 100 anos após o início da era. O século II começou no dia 1 de janeiro do ano 101 d.C., e assim sucessivamente. Como não existe o ano zero, o intervalo entre os anos 50 a.C. e 50 d.C., por exemplo, é de 100 anos. Outra forma de representar anos é utilizando-se números inteiros, como fazem os astrônomos. Para eles, o ano 1 a.C. corresponde ao ano 0, o ano 2 a.C. ao ano -1, e assim sucessivamente. Os anos depois de Cristo são representados pelos números inteiros positivos, fazendo corresponder o número 1 ao ano 1 d.C.

Considerando o intervalo de 3 a.C. a 2 d.C., o quadro que relaciona as duas contagens descritas no texto é:

(A)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	-1	0	1	2	3

(B)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	-2	-1	0	1	2

(C)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	-2	-1	1	2	3

(D)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	-3	-2	-1	1	2

(E)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	-3	-2	-1	0	1

**8. (ENEM-MEC)** O dono de uma oficina mecânica precisa de um pistão das partes de um motor, de 68 mm de diâmetro, para o conserto de um carro. Para conseguir um, esse dono vai até um ferro-velho e lá encontra pistões com diâmetros iguais a 68,21 mm; 68,102 mm; 68,001 mm; 68,02 mm e 68,012 mm. Para colocar o pistão no motor que está sendo consertado, o dono da oficina terá de adquirir aquele que tenha o diâmetro mais próximo do que precisa. Nessa condição, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmetro

- (A) 68,21 mm.
- (B) 68,102 mm.
- (C) 68,02 mm.
- (D) 68,012 mm.
- (E) 68,001 mm.

**9. (INEP-MEC)** Em uma venda existem seis depósitos com capacidade de 15, 16, 18, 19, 20 e 31 litros, respectivamente. Um dos depósitos está cheio de nata e os outros estão cheios de leite ou de chocolate líquido. Se o volume de leite é o dobro do de chocolate líquido, a soma dos volumes de chocolate líquido e de nata existentes na venda é

- (A) 49 litros.
- (B) 51 litros.
- (C) 53 litros.
- (D) 65 litros.
- (E) 70 litros.

**10. (INEP-MEC)** Quatro unidades do produto A, com "peso" de 1 kg, custam 480 reais. Sete unidades do produto B, "pesando" 1 kg, custam 300 reais. Sabendo-se que 10 unidades do produto A e x unidades do produto B,

juntas, "pesam" no mínimo 5 kg e não ultrapassam 2.000 reais, então o número x é

- (A) primo.
- (B) divisível por 7.
- (C) divisível por 5.
- (D) múltiplo de 6.
- (E) múltiplo de 4.

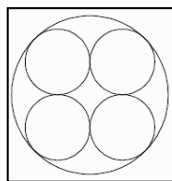
**11. (FUVEST-SP)** Por recomendação médica, uma pessoa deve fazer, durante um curto período, dieta alimentar que lhe garanta um mínimo diário de 7 miligramas de vitamina A e 60 microgramas de vitamina D, alimentando-se exclusivamente de um iogurte especial e de uma mistura de cereais, acomodada em pacotes. Cada litro do iogurte fornece 1 miligrama de vitamina A e 20 microgramas de vitamina D. Cada pacote de cereais fornece 3 miligramas de vitamina A e 15 microgramas de vitamina D. Consumindo x litros de iogurte e y pacotes de cereais diariamente, a pessoa terá certeza de estar cumprindo a dieta se

- (A)  $x + 3y \geq 7$  e  $20x + 15y \geq 60$ .
- (B)  $x + 3y \leq 7$  e  $20x + 15y \leq 60$ .
- (C)  $x + 20y \geq 7$  e  $3x + 15y \geq 60$ .
- (D)  $x + 20y \leq 7$  e  $3x + 15y \leq 60$ .
- (E)  $x + 15y \geq 7$  e  $3x + 20y \geq 60$ .

**12 (UFSCar-SP)** Nas eleições do dia 1.º de outubro passado, dos eleitores que compareceram às urnas em uma determinada cidade, 29% deles votaram, para prefeito, no candidato U, 36% no candidato V, 25% no candidato W e os 20.000 eleitores restantes votaram em branco ou anularam seus votos. Com base nesses dados, pode-se afirmar que o número de eleitores que votou no candidato V foi:

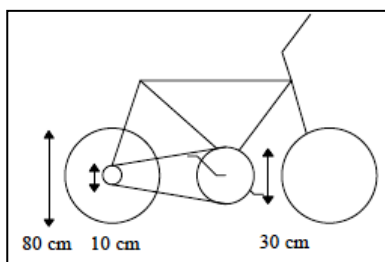
- (A) 50.000.
- (B) 58.000.
- (C) 72.000.
- (D) 180.000.
- (E) 200.000.

**13. (INEP-MEC)** Uma fábrica de tubos acondiciona tubos cilíndricos menores dentro de outros tubos cilíndricos. A figura mostra uma situação em que quatro tubos cilíndricos estão acondicionados perfeitamente em um tubo com raio maior. Suponha que você seja o operador da máquina que produzirá os tubos maiores em que serão colocados, sem ajustes ou folgas, quatro tubos cilíndricos internos. Se o raio da base de cada um dos cilindros menores for igual a 6cm, a máquina por você operada deverá ser ajustada para produzir tubos maiores, com raio da base igual a:



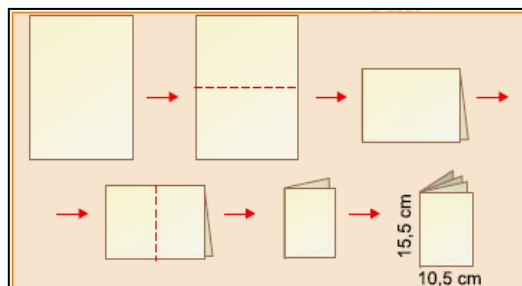
- (A) 12 cm  
(B)  $12\sqrt{2}$  cm  
(C)  $24\sqrt{2}$  cm  
(D)  $6(1 + \sqrt{2})$  cm  
(E)  $12(1 + \sqrt{2})$  cm

**14. (INEP-MEC)** As bicicletas possuem uma corrente que liga uma coroa dentada dianteira, movimentada pelos pedais, a uma coroa localizada no eixo da roda traseira. O número de voltas dadas pela roda traseira a cada pedalada depende do tamanho relativo destas coroas. Quando se dá uma pedalada na bicicleta ao lado (isto é, quando a coroa acionada pelos pedais dá uma volta completa), qual é a distância aproximada percorrida pela bicicleta, sabendo-se que o comprimento de um círculo de raio  $R$  é igual a  $2 \cdot R$ , onde  $\cdot \cdot \cdot 3$ ?



- (A) 1,2 m  
(B) 2,4 m  
(C) 7,2 m  
(D) 14,4 m  
(E) 48,0 m

**15. (INEP-MEC)** Na literatura de cordel, os textos são impressos, em geral, com 8, 16, 24 ou 32 páginas de formato 10,5cm x 15,5cm. As razões históricas que explicam tal fato estão relacionadas à forma artesanal como são montadas as publicações e ao melhor aproveitamento possível do papel disponível. Considere a confecção mostrada na figura de um texto de cordel com 8 páginas (4 folhas). Utilizando o processo descrito acima, pode-se produzir um exemplar de cordel com 32 páginas de 10,5 cm x 15,5 cm, com o menor gasto possível de material, utilizando uma única folha de:

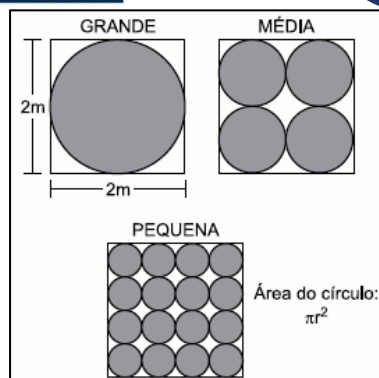


- (A) 84 cm x 62 cm  
(B) 84 cm x 124 cm  
(C) 42 cm x 31 cm  
(D) 42 cm x 62 cm  
(E) 21 cm x 31 cm

**16. (INEP-MEC)** Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a:

- (A) uma volta completa.  
(B) uma volta e meia.  
(C) duas voltas completas.  
(D) duas voltas e meia.  
(E) cinco voltas completas.

**17. (INEP-MEC)** Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas. As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:



(A) a entidade I recebe mais material do que a entidade II.

(B) a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.

(C) a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.

(D) as entidades I e II recebem juntas, menos material do que a entidade III.

(E) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

**18. (INEP-MEC)** As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas à linha do equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente:

(A) 16 horas.

(B) 20 horas.

(C) 25 horas.

(D) 32 horas.

(E) 36 horas.

**19. (INEP-MEC)** Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada:

(A) no centro do quadrado.

(B) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada.

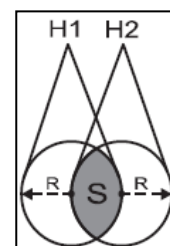
(C) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.

(D) no vértice de um triângulo equilátero de base AB, 90posto a essa base.

(E) no ponto médio da estrada que liga as estações A e B.

**20. (INEP-MEC)** Dois holofotes iguais, situados em H1 e H2, respectivamente, iluminam regiões circulares, ambas de raio R. Essas regiões se sobrepõem e determinam uma região S de maior intensidade luminosa, conforme figura.

Área do setor circular:  $A_{SC} = \frac{\alpha R^2}{2}$ ,  $\alpha$  em radianos. A área da região S, em unidade de área, é igual a:



(A)  $\frac{2\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}R^2}{2}$

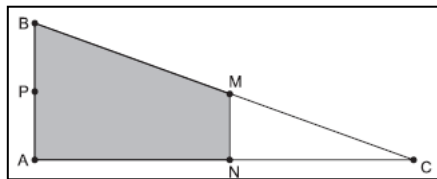
(B)  $\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$

(C)  $\frac{\pi R^2}{12} - \frac{R^2}{8}$

(D)  $\frac{\pi R^2}{2}$

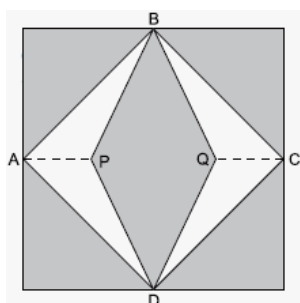
(E)  $\frac{\pi R^3}{3}$

**21. (INEP-MEC)** Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras. A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde:



- (A) a mesma área do triângulo AMC.  
(B) a mesma área do triângulo BNC.  
(C) a metade da área formada pelo triângulo ABC.  
(D) ao dobro da área do triângulo MNC.  
(E) ao triplo da área do triângulo MNC.

**22. (INEP-MEC)** Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir. Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem  $\frac{1}{4}$  da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R\$ 30,00 o  $m^2$ , e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R\$ 50,00 o  $m^2$ .



De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

- (A) R\$ 22,50  
(B) R\$ 35,00  
(C) R\$ 40,00  
(D) R\$ 42,50  
(E) R\$ 45,00

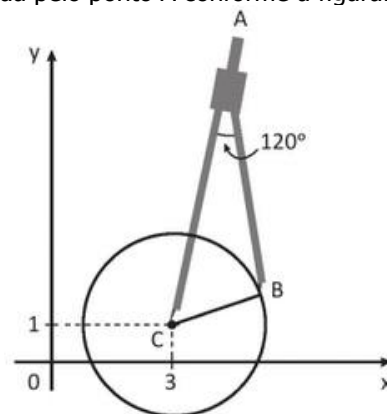
**23. (INEP-MEC)** Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias. Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma. Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do

evento deve estimar a medida  $R$  do raio adequado para a plataforma em termos da medida  $L$  do lado da base da estátua.

Qual relação entre  $R$  e  $L$  o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida?

- (A)  $R \geq L / \sqrt{2}$   
(B)  $R \geq 2L / \pi$   
(C)  $R \geq L / \sqrt{\pi}$   
(D)  $R \geq L / 2$   
(E)  $R \geq L / (2\sqrt{2})$

**24. (INEP-MEC)** Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de  $120^\circ$ . A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

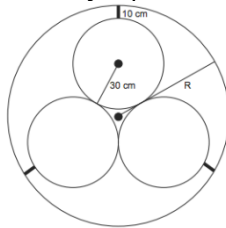
Considere 1,7 como aproximação para  $\sqrt{3}$ .

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção



- (A) I.
- (B) II.
- (C) III.
- (D) IV.
- (E) V.

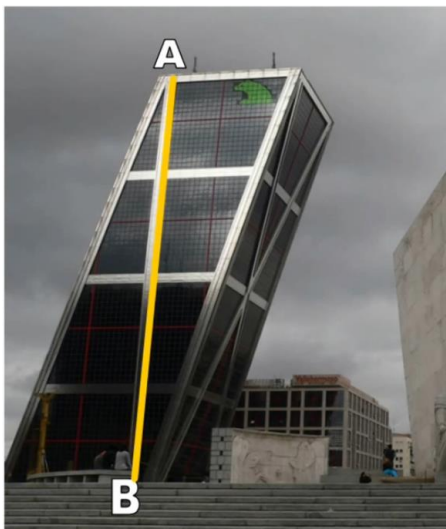
**25. (INEP-MEC)** Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida  $R$ . Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura: Utilize 1,7 como aproximação para 3.



O valor de  $R$ , em centímetros, é igual a

- A) 64,0.
- B) 65,5.
- C) 74,0.
- D) 81,0.
- E) 91,0.

**26. (INEP-MEC)** As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri na Espanha. A inclinação das torres é de  $15^\circ$  com a vertical e elas têm, uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento  $AB$ ). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

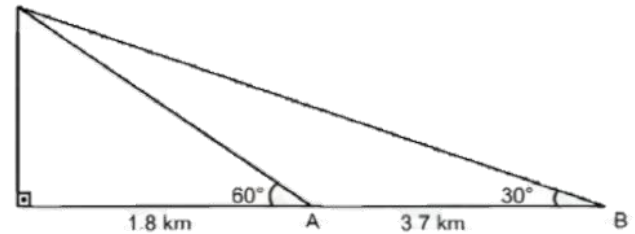


Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de  $15^\circ$  e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

- (A) menor que  $100\text{m}^2$
- (B) entre  $100\text{m}^2$  e  $300\text{m}^2$
- (C) entre  $300\text{m}^2$  e  $500\text{m}^2$
- (D) entre  $500\text{m}^2$  e  $700\text{m}^2$
- (E) maior que  $700\text{m}^2$

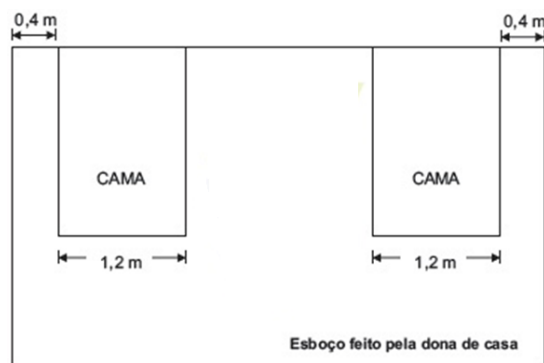
**27. (INEP-MEC)** Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição. Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de  $60^\circ$ ; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de  $30^\circ$ . Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

Balão



- (A) 1,8 km
- (B) 1,9 km
- (C) 3,1 km
- (D) 3,7 km
- (E) 5,5 km

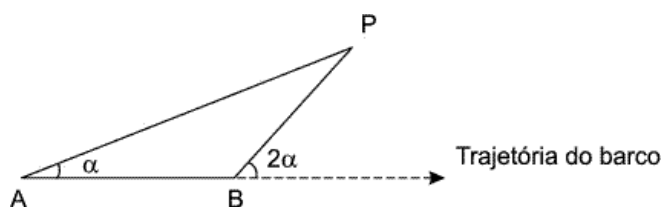
**28. (INEP-MEC)** Uma dona de casa pretende comprar uma escrivaninha para colocar entre as duas camas do quarto de seus filhos. Ela sabe que o quarto é retangular, de dimensões  $4\text{ m} \times 5\text{ m}$ , e que as cabeceiras das camas estão encostadas na parede de maior dimensão, onde ela pretende colocar a escrivaninha, garantindo uma distância de 0,4 m entre a escrivaninha e cada uma das camas, para circulação. Após fazer um esboço com algumas medidas, decidirá se comprará ou não a escrivaninha.



Após analisar o esboço e realizar alguns cálculos, a dona de casa decidiu que poderia comprar uma escrivaninha, de largura máxima igual a

- (A) 0,8 m.
- (B) 1,0 m.
- (C) 1,4 m.
- (D) 1,6 m.
- (E) 1,8 m.

**29. (INEP-MEC)** Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual  $\alpha$  fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual  $2\alpha$ . A figura ilustra essa situação:



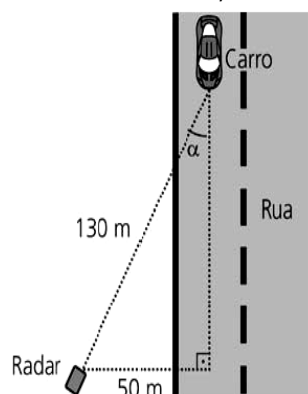
Suponha que o navegante tenha medido o ângulo  $\alpha = 30^\circ$  e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância  $AB = 2\,000$  m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

- (A) 1 000 m.
- (B)  $1\,000\sqrt{3}$  m.
- (C)  $2\,000 \frac{\sqrt{3}}{3}$  m.
- (D) 2 000 m.
- (E)  $2\,000 \sqrt{3}$  m.

**30. (INEP-MEC)** O radar é um dos dispositivos mais usados para coibir o excesso de velocidade nas vias de trânsito. O seu princípio de funcionamento é baseado no efeito Doppler das ondas eletromagnéticas refletidas pelo carro em movimento. Considere que a velocidade medida

por um radar foi  $V_m = 72$  km/h para um carro que se aproximava do aparelho.

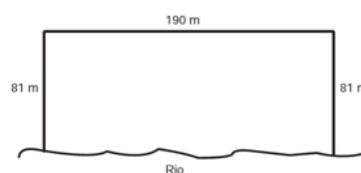
Quando um carro não se move diretamente na direção do radar, é preciso fazer uma correção da velocidade medida pelo aparelho ( $V_m$ ) para obter a velocidade real do veículo ( $V_r$ ). Essa correção pode ser calculada a partir da fórmula  $V_m = V_r \cos(\alpha)$ , em que  $\alpha$  é o ângulo formado entre a direção de tráfego da rua e o segmento de reta que liga o radar ao ponto da via que ele mira. Suponha que o radar tenha sido instalado a uma distância de 50 m do centro da faixa na qual o carro trafegava, e tenha detectado a velocidade do carro quando este estava a 130 m de distância, como mostra a figura abaixo.



Se o radar detectou que o carro trafegava a 72 km/h, sua velocidade real era igual a

- a) 66,5 km/h.
- b) 78 km/h.
- c) 36 km/h.
- d) 144 km/h.
- e) 36 km/h.

**31. (INEP-MEC)** Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

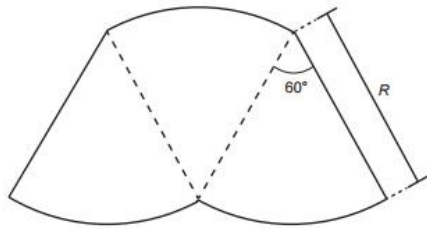
- A) 6.
- B) 7.
- C) 8.
- D) 11.
- E) 12.

**32. (INEP-MEC)** O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é

ângulo central igual a  $60^\circ$ . O raio  $R$  deve ser um número natural.

O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m x 24 m.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.



Considere 3,0 como aproximação para  $\pi$ .

O maior valor possível para  $R$ , em metros, deverá ser

- A) 16.
- B) 28.
- C) 29.
- D) 31.
- E) 49.

**33. (INEP-MEC)** O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm.

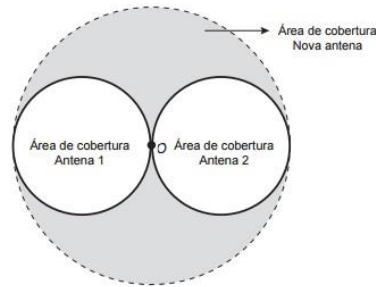
Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Considere 1,7 como aproximação para  $\sqrt{3}$ .

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a

- A) 18.
- B) 26.
- C) 30.
- D) 35.
- E) 60.

**34. (INEP-MEC)** Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto  $O$ , como mostra a figura.

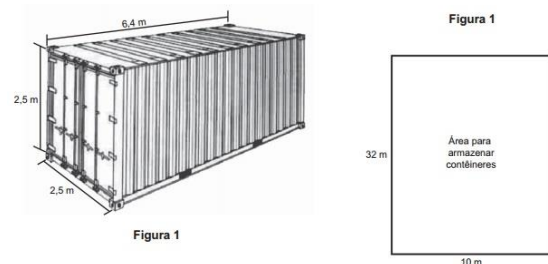


O ponto  $O$  indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

- A)  $8\pi$ .
- B)  $12\pi$ .
- C)  $16\pi$ .
- D)  $32\pi$ .
- E)  $64\pi$ .

**35. (INEP-MEC)** Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).



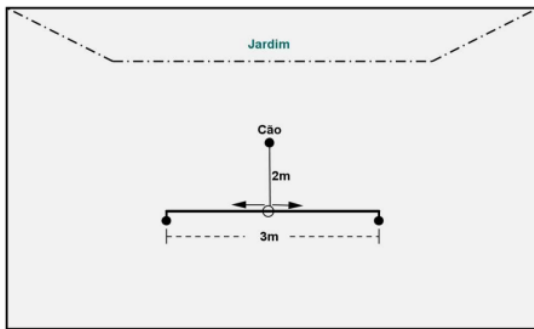
De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrem espaços nem ultrapassarem a área delimitada. Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

- A) 12,5 m.
- B) 17,5 m.
- C) 25,0 m.
- D) 22,5 m.
- E) 32,5 m.

**36. (INEP-MEC)** Preocupado com os constantes assaltos ocorridos no bairro, Alessandro decide adquirir um cão de guarda para proteger a sua residência. Como no quintal da sua casa há um jardim, ele deseja limitar a área livre de circulação do cão para que as flores não sejam destruídas pelo animal. Para isso ele fixou uma barra de ferro próximo ao chão, com 3 metros de comprimento, e adquiriu uma corrente, com 2 metros de comprimento, para o seu cachorro. Através de uma argola de metal, ele conectou a corrente do cachorro à barra de ferro, de modo que permita ao cão atingir

qualquer lugar que dista até 2 metros de qualquer ponto

dessa barra, conforme a figura.



Qual a área da região, em  $m^2$ , na qual o cão pode circular estando preso pela corrente à barra? (Considere:  $\pi = 3$ ).

- a) 6
- b) 10
- c) 12
- d) 18
- e) 24

**37. (UFRJ)** Os ponteiros de um relógio circular medem, do centro às extremidades, 2 metros, o dos minutos, e 1 metro, o das horas.

Determine a distância entre as extremidades dos ponteiros quando o relógio marca 4 horas.

**38. (INEP-MEC)** Na imagem, a personagem Mafalda mede a circunferência do globo que representa o planeta Terra.



Em uma aula de matemática, o professor considera que a medida encontrada por Mafalda, referente à maior circunferência do globo, foi de 80 cm. Além disso, informa que a medida real da maior circunferência da Terra, a linha do Equador, é de aproximadamente 40.000 km.

QUINO. *Toda Mafalda*. São Paulo: Martins Fontes, 2008 (adaptado).

A circunferência da linha do Equador é quantas vezes maior do que a medida encontrada por Mafalda?

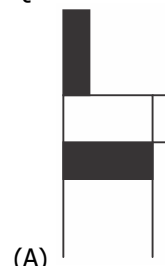
- a) 500
- b) 5.000
- c) 500.000
- d) 5.000.000

e) 50.000.000

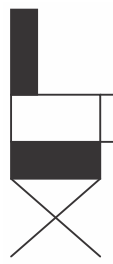
**39. (INEP-MEC)** Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.



Qual é o esboço obtido pelos alunos?



(A)



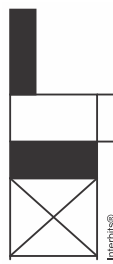
(B)



(C)

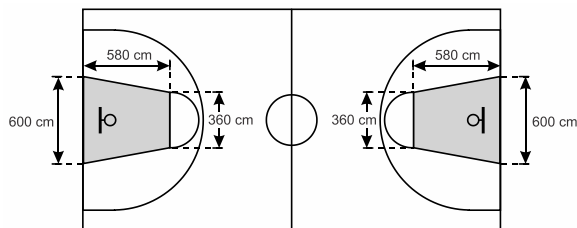


(D)



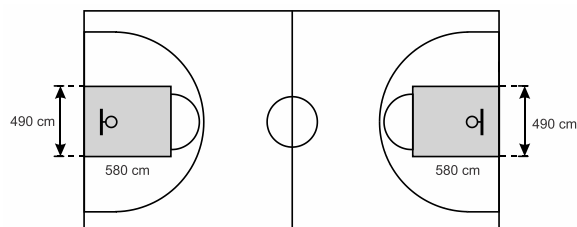
(E)

**40. (INEP-MEC)** O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrações, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrações das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.

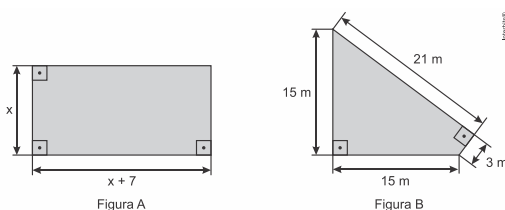


Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garração, que corresponde a um(a)

- (A) aumento de  $5.800 \text{ cm}^2$ .
- (B) aumento de  $75.400 \text{ cm}^2$ .
- (C) aumento de  $214.600 \text{ cm}^2$ .
- (D) diminuição de  $63.800 \text{ cm}^2$ .
- (E) diminuição de  $272.600 \text{ cm}^2$ .

**41. (INEP-MEC)** Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

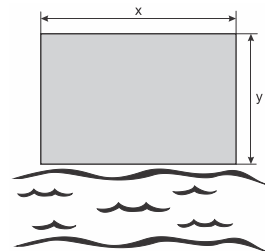


Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em

metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

- (A) 7,5 e 14,5.
- (B) 9,0 e 16,0.
- (C) 9,3 e 16,3.
- (D) 10,0 e 17,0.
- (E) 13,5 e 20,5.

**42. (INEP-MEC)** Um terreno retangular de lados cujas medidas, em metro, são  $x$  e  $y$  será cercado para a construção de um parque de diversões. Um dos lados do terreno encontra-se às margens de um rio. Observe a figura.



Para cercar todo o terreno, o proprietário gastará R\$ 7.500,00. O material da cerca custa R\$ 4,00 por metro para os lados do terreno paralelos ao rio, e R\$ 2,00 por metro para os demais lados.

Nessas condições, as dimensões do terreno e o custo total do material podem ser relacionados pela equação

- (A)  $4(2x + y) = 7.500$
- (B)  $4(x + 2y) = 7.500$
- (C)  $2(x + y) = 7.500$
- (D)  $2(4x + y) = 7.500$
- (E)  $2(2x + y) = 7.500$





Daniel França  
matemática



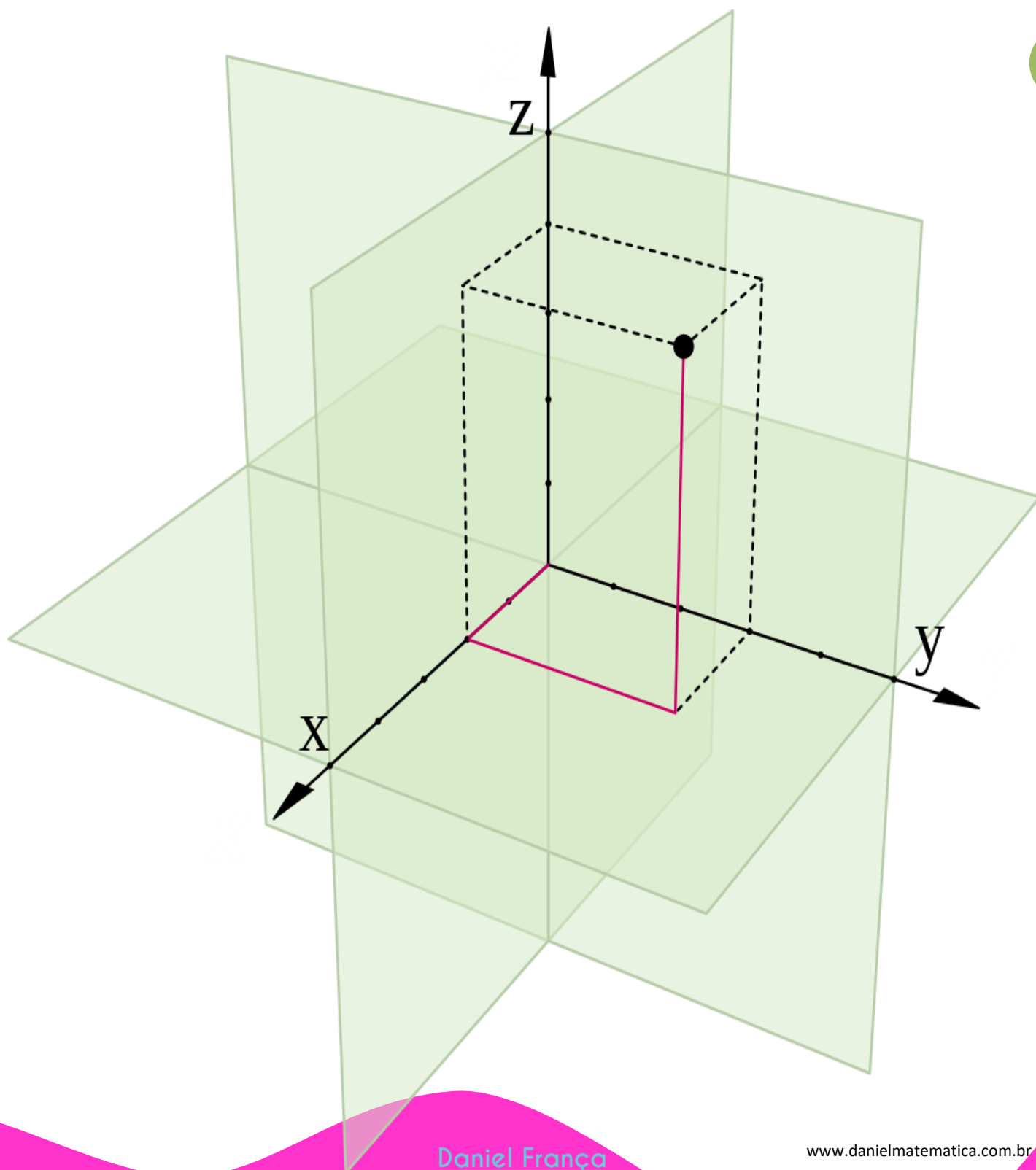
Daniel França  
matemática



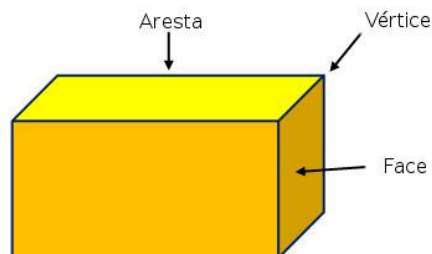
Daniel França  
matemática

# GEOMETRIA ESPACIAL

42



♣ **Poliedros** são sólidos geométricos ou figuras geométricas espaciais formadas por três elementos básicos: faces, arestas e vértices. Os **Poliedros** podem ser convexos e não convexos.



#### ♣ Classificação

Os poliedros são classificados em **regulares** e **não regulares**. Dessa forma, os poliedros regulares surgem quando suas faces formam polígonos regulares e congruentes.

Por sua vez, os poliedros não regulares são formados por pelo menos um polígono irregular.

O **Teorema ou Relação de Euler** é válido somente para **poliedros regulares**, os quais todas as faces possuem o mesmo número de arestas e são compostos de **polígonos regulares**, ou seja, cada um com o mesmo número de lados.

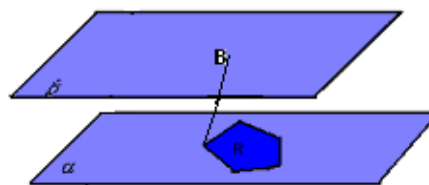
$$V + F = A + 2$$

#### ♣ Poliedros de Platão

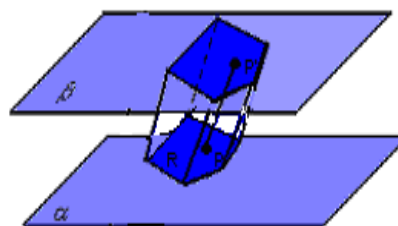
Poliedro	Total de vértices	Total de aresta	Total de face	Tipo de cada face
Tetraedro	4	6	4	Triangulares
Hexaedro	8	12	6	Quadradas
Octaedro	6	12	8	Triangulares
Dodecaedro	20	30	12	Pentagonais
Icosaedro	12	30	20	Triangulares

#### ♣ Prismas

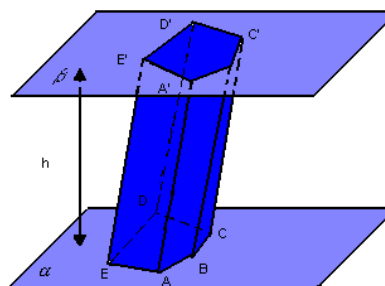
Consideremos um polígono convexo  $R$  de vértices  $A_1, \dots, A_n$  contido em um plano  $\alpha$  e por um ponto  $B_1$  fora de  $\alpha$  traçamos um plano  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ .



Traçamos retas paralelas a  $A_1B_1$  que cortam  $\beta$  em  $B_2, \dots, B_n$ . Os pontos  $B_1, \dots, B_n$  formam um polígono  $R'$  e o quadrilátero  $A_1A_2B_1B_2$  é um paralelogramo. Os paralelogramos assim determinados junto com os polígonos  $R$  e  $R'$  determinam um poliedro chamado **prisma**.



#### ♣ Elementos do prisma



- bases: as regiões poligonais  $R$  e  $R'$
- altura: a distância  $h$  entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$
- arestas das bases: os lados  $A_iA_{i+1}$  e  $B_iB_{i+1}$  (dos polígonos)
- arestas laterais: os segmentos  $A_iB_i$
- faces laterais: os paralelogramos  $A_iA_{i+1}B_iB_{i+1}$

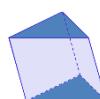
#### ♣ Classificação

Reto: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases;

Oblíquo: quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

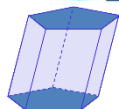
♣ Um prisma é classificado pelo tipo de polígono que constitui suas bases.

EX:



Prisma triangular



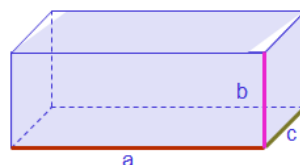


Prisma pentagonal

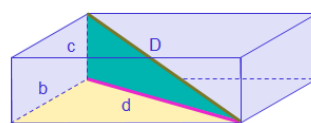
V= Volume do cubo  
A<sub>t</sub>= Área total do cubo  
d= Diagonal da face do cubo  
D= Diagonal do cubo

♣ O paralelepípedo...

O paralelepípedo é um prisma quadrangular. Suas faces são duas a duas congruentes.



a, b e c → As dimensões do paralelepípedo.



$$V = abc$$

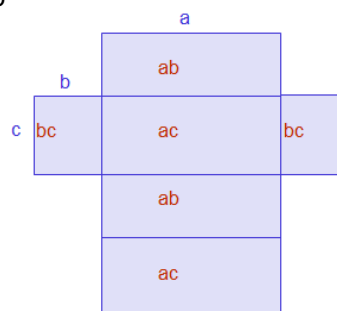
Se  $d^2 = a^2 + b^2$  e  $D^2 = c^2 + d^2$ , temos

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$A_t = 2(ab + ac + bc)$$

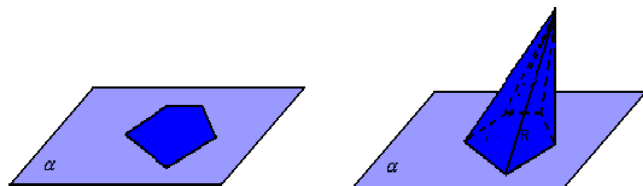
a= comprimento do paralelepípedo  
b= largura do paralelepípedo  
c= altura do paralelepípedo  
d= diagonal da base do paralelepípedo  
D= Diagonal do paralelepípedo

♣ Planificação

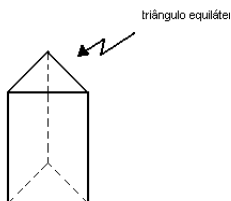


♣ Pirâmides

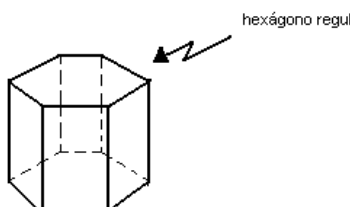
Dados um polígono convexo R de vértices  $A_1, \dots, A_n$  contido em um plano  $\alpha$ , e um ponto V (vértice) fora de  $\alpha$ , consideramos o conjunto de todos os segmentos  $VA_i$ ,  $i=1, \dots, n$ . Os triângulos  $VA_iA_{i+1}$  junto com o polígono R delimitam uma região do espaço chamada *pirâmide*.



♣ Chamamos de prisma regular todo prisma reto cujas bases são polígonos regulares:



Prisma regular triangular



Prisma regular hexagonal

♣ Observação: As faces de um prisma regular são retângulos congruentes.

♣ No geral, temos:

$$V = A_B \cdot h$$

V= Volume do prisma

A<sub>B</sub>= Área da base

h= Altura

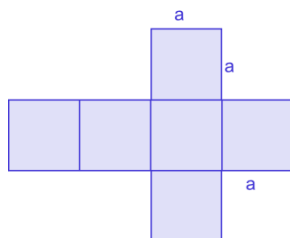
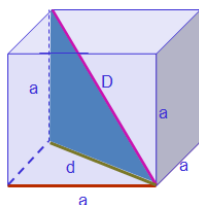
$$A_T = 2A_B + A_L$$

A<sub>T</sub>= Área total

A<sub>B</sub>= Área da base

A<sub>L</sub>= Área lateral

♣ O cubo...



$$V = a^3$$

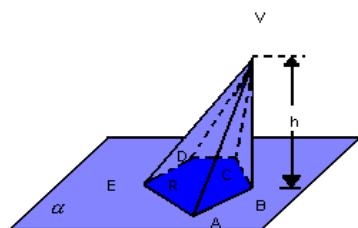
$$A_t = 6a^2$$

$$d = a\sqrt{2}$$

$$D = a\sqrt{3}$$

a= aresta do cubo

♣ Elementos da pirâmide



- base: o polígono convexo **R**
- arestas da base: os lados  $A_i A_{i+1}$  do polígono
- arestas laterais: os segmentos  $VA_i$
- faces laterais: os triângulos  $VA_i A_{i+1}$
- altura: distância **h** do ponto **V** ao plano

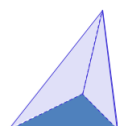
♣ Classificação

Uma pirâmide é **reta** quando a reta perpendicular ao plano  $\alpha$  passando pelo vértice coincide com o centro do polígono da base. Quando não, será oblíqua.

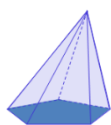
♣ Toda pirâmide reta, cujo polígono da base é regular, recebe o nome de *pirâmide regular*. Ela pode ser triangular, quadrangular, pentagonal etc., conforme sua base seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc.

♣ Uma pirâmide é classificada pelo tipo de polígono que constitui sua base.

EX:

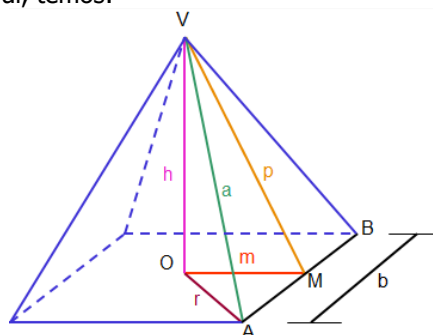


Pirâmide triangular



Pirâmide pentagonal

♣ No geral, temos:



- **VO = h**, altura;
- **VA = a**, aresta lateral;
- **AB = b**, aresta da base;
- **OM = m**, apótema da base;
- **OA = r**, raio da circunferência circunscrita à base;
- **VM = p**, apótema pirâmide.

$$p^2 = h^2 + m^2$$

$$a^2 = h^2 + r^2$$

$$a^2 = p^2 + (b/2)^2$$

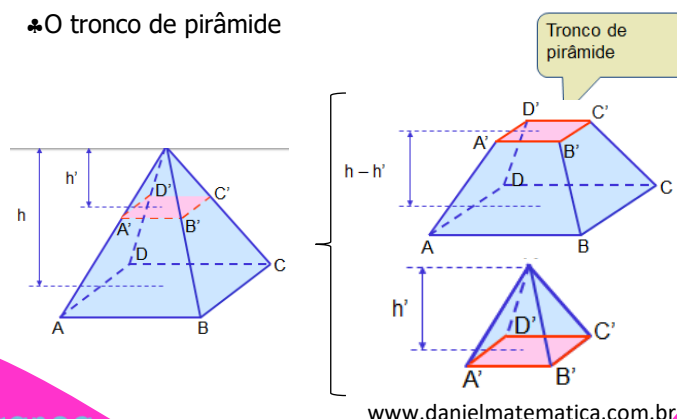
$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

V= Volume  
 $A_b$ = Área da base  
h= Altura



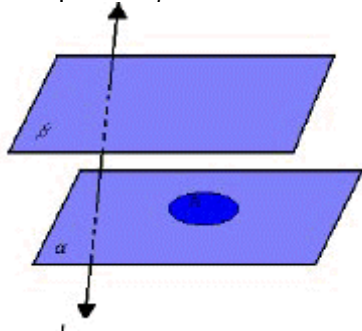
♣ A **área total** continuará sendo a soma de todas as faces da pirâmide (face da base + faces laterais triangulares).

♣ O tronco de pirâmide

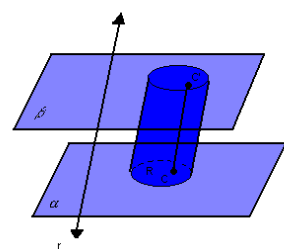
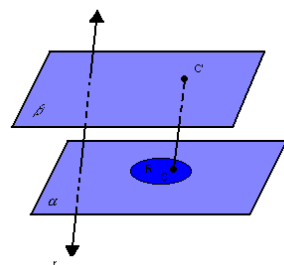


### ♣ Cilindro

Na figura abaixo, temos dois planos paralelos e distintos,  $\alpha$  e  $\beta$ , um círculo  $R$  contido em  $\alpha$  e uma reta  $r$  que intercepta  $\alpha$  e  $\beta$  mas não  $R$ :

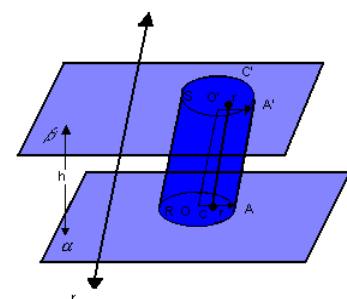


Para cada ponto  $C$  da região  $R$ , vamos considerar o segmento  $\overline{CC'}$ , paralelo à reta  $r$  ( $C' \in \beta$ ):



Chamamos de *cilindro*, ou *cilindro circular*, o conjunto de todos os segmentos  $\overline{CC'}$  congruentes e paralelos a  $r$ .

Elementos do cilindro

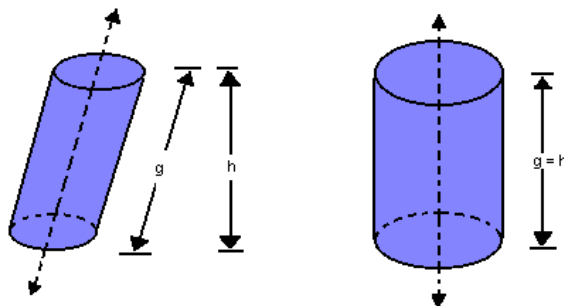


- bases:** os círculos de centro  $O$  e  $O'$  e raios  $r$
- altura:** a distância  $h$  entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$
- geratriz:** qualquer segmento de extremidades nos pontos das circunferências das bases (por exemplo,  $\overline{AA'}$ ) e paralelo à reta  $r$

### ♣ Classificação do Cilindro

Circular oblíquo: quando as geratrizes são oblíquas às bases;

Circular reto: quando as geratrizes são perpendiculares às bases.



♣ De forma geral, temos:

$$A_T = 2A_B + A_L$$

$A_T$  = Área total

$A_B$  = Área da base (círculo)

$A_L$  = Área lateral

$$A_B = \pi \cdot R^2$$

$A_B$  = Área da base (círculo)

$R$  = Raio do círculo da base

$\pi$  = constante irracional Pi.

$$A_L = 2 \pi R h$$

$A_L$  = Área lateral

$\pi$  = constante irracional Pi.

$R$  = Raio do círculo da base

$h$  = altura do cilindro

$$V = \pi R^2 \cdot h$$

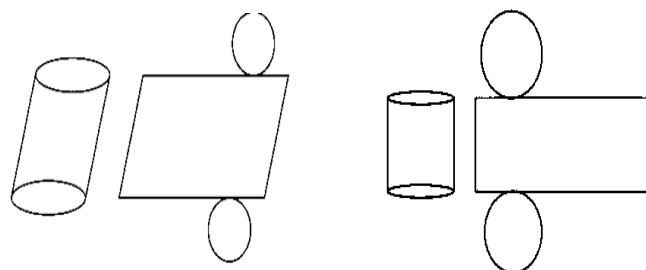
$V$  = Volume

$\pi$  = constante irracional Pi.

$R$  = Raio do círculo da base

$h$  = altura do cilindro

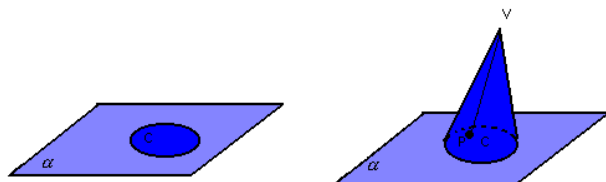
♣ Planificação



$A_b$  = Área da base  
 $H$  = Altura  
 $R$  = Raio do círculo da base

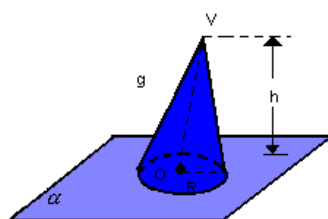
### ♣ Cone

Dado um círculo  $C$ , contido num plano  $\alpha$ , e um ponto  $V$  (*vértice*) fora de  $\alpha$ , chamamos de *cone circular* (ou simplesmente cone) o conjunto de



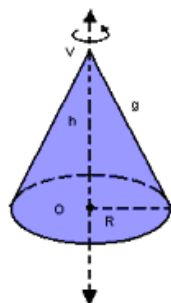
e todos os segmentos  $\overline{VP}, P \in C$ .

Elementos do cone circular



- altura:** distância  $h$  do vértice  $V$  ao plano  $\alpha$
- geratriz ( $g$ ):** segmento com uma extremidade no ponto  $V$  e outra num ponto da circunferência
- raio da base:** raio  $R$  do círculo
- eixo de rotação:** reta  $\overline{VO}$  determinada pelo centro do círculo e pelo vértice do cone

♣ Cone reto: Todo cone cujo eixo de rotação é perpendicular à base é chamado *cone reto*, também denominado *cone de revolução*. Ele pode ser gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.



Da figura, e pelo Teorema de Pitágoras, temos a seguinte relação:  $g^2 = h^2 + R^2$

De forma geral, temos:

$$V = \frac{A_b \cdot H}{3} \text{ ou } \frac{\pi R^2 \cdot H}{3}$$

$V$  = Volume do cone

$$A_L = R\pi g$$

$A_L$  = Área lateral  
 $R$  = Raio da base  
 $g$  = Geratriz

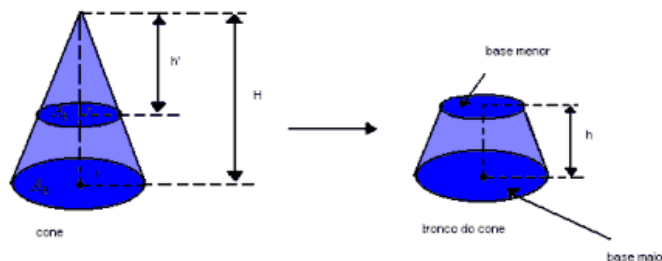


$$A_T = A_L + A_B$$

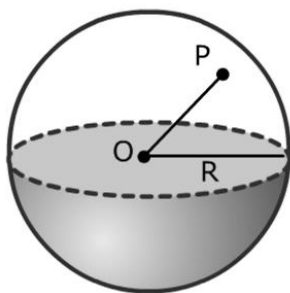
$$A_T = R\pi g + \pi R^2 = \pi R (g + R)$$

$A_T$  = Área total  
 $A_L$  = Área lateral  
 $A_B$  = Área da base

### ♣ Tronco de cone



♣ Esferas



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

V= Volume da esfera

$\pi$  =Constante irracional

R= Raio da esfera

$$A_T = 4 \pi R^2$$

$A_T$  =Área total

$\pi$  =Constante irracional

R= Raio da esfera

### Exercícios

**1. (INEP-MEC)** Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm<sup>3</sup> e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm<sup>3</sup>, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

- (A) 450.
- (B) 500.
- (C) 600.
- (D) 750.
- (E) 1000.

**2. (INEP-MEC)** O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em 1 m<sup>2</sup>, ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em

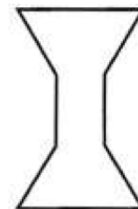
formato de um cubo com 1 m<sup>2</sup> de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1 200 mm, era de um terço da sua capacidade.

Utilize 3,0 como aproximação para  $\pi$ .

O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de

- (A) 10,8.
- (B) 12,0.
- (C) 32,4.
- (D) 108,0.
- (E) 324,0.

**3. (INEP-MEC)** Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projeto uma escultura transparente e oca, cuja formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura é a vista frontal dessa escultura.



No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante. O gráfico que expressa a altura ( $h$ ) da água na escultura em função do tempo ( $t$ ) decorrido é:

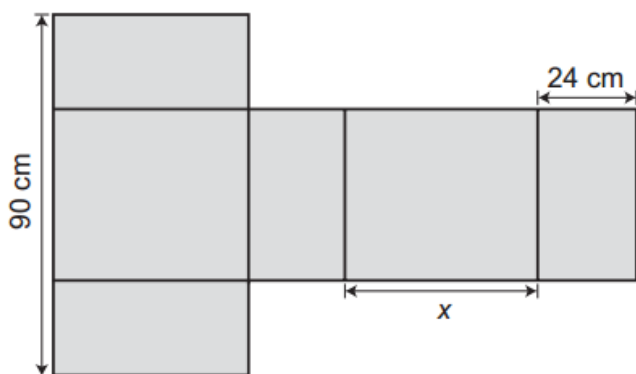
- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E)



**4. (INEP-MEC)** Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro  $P$ , obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro  $P$ , então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces. Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

- (A) 6
- (B) 8
- (C) 14
- (D) 24
- (E) 30

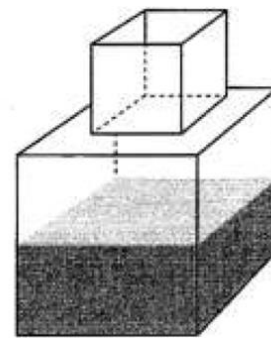
**5. (INEP-MEC)** Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm).



A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo. O maior valor possível para  $x$ , em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é:

- (A) 25.
- (B) 33.
- (C) 42.
- (D) 45.
- (E) 49.

**6. (INEP-MEC)** Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

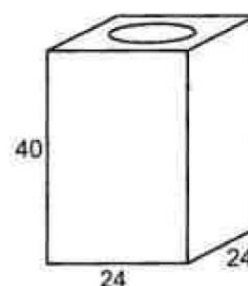
- (A) 8
- (B) 10
- (C) 16
- (D) 18
- (E) 24

**7. (INEP-MEC)** O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1 : 100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3 cm, 1 cm e 2 cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será:

- (A) 6.
- (B) 600.
- (C) 6 000.
- (D) 60 000.
- (E) 6 000 000.

**8. (INEP-MEC)** Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.



Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

- (A) 14,4%
- (B) 20,0%
- (C) 32,0%
- (D) 36,0%
- (E) 64,0%

**9. (INEP-MEC)** Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado. Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

Use 3 como valor aproximado para  $\pi$ . A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a

- (A) 168.
- (B) 304.
- (C) 306.
- (D) 378.
- (E) 514.

**10. (INEP-MEC)** Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diploma a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro  $d$  em centímetros, sem folga, dando-se cinco voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura.



Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível.

- (A)  $\pi d$
- (B)  $2 \pi d$
- (C)  $4 \pi d$
- (D)  $5 \pi d$
- (E)  $10 \pi d$

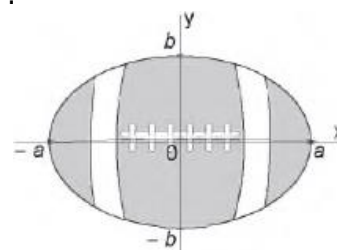
**11. (INEP-MEC)** Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda à parte da superfície lateral a ser revestida

Qual deverá ser a forma do adesivo?

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E)

**12. (INEP-MEC)** A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores  $a$  e  $b$  são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.

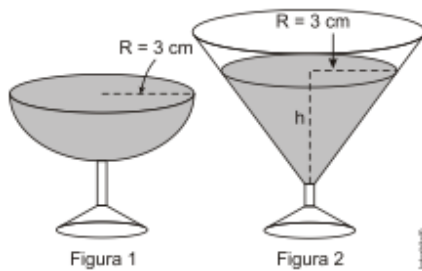
Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por  $V = 4ab^2$ .



O volume dessa bola, em função apenas de  $b$ , é dado por

- (A)  $8b^3$
- (B)  $6b^3$
- (C)  $5b^3$
- (D)  $4b^3$
- (E)  $2b^3$

**13. (INEP-MEC)** Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.



Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério e servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

- (A) 1,33.  
(B) 6,00.  
(C) 12,00.  
(D) 56,52.  
(E) 113,04.

**14. (INEP-MEC)** Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros delas seriam:

 1385 km	Toda água do planeta 1,39 bilhões de $\text{km}^3$
 406 km	Água doce do planeta 35,03 milhões de $\text{km}^3$
 272 km	Água doce subterrânea 10,53 milhões de $\text{km}^3$
 58 km	Água doce superficial 104,59 mil $\text{km}^3$

Guia do Estudante: Atualidades e Vestibulares+ENEM. Abril: São Paulo, 2009.

A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é

- (A)  $1/343$   
(B)  $1/49$   
(C)  $1/7$   
(D)  $29/136$

(E) 136/203

**15. (INEP-MEC)** O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.



Figura 1

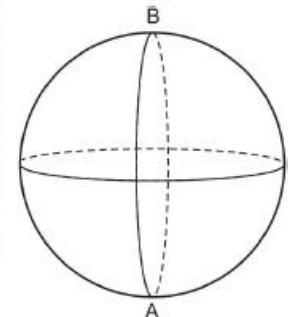
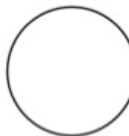






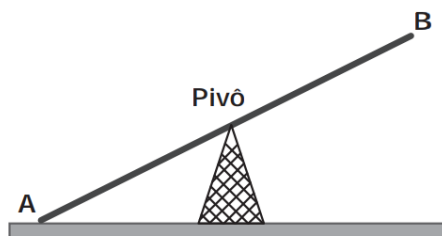
Figura 2

Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por

- a)   
b)   
c)   
d)   
e) 

**16. (INEP-MEC)** Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra. Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E)

**17. (INEP-MEC)** Para se construir um contra piso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contra piso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com  $14 \text{ m}^3$  de concreto. Qual é o volume de cimento, em  $\text{m}^3$ , na carga de concreto trazido pela betoneira?

- (A) 1,75  
(B) 2,00  
(C) 2,33  
(D) 4,00  
(E) 8,00

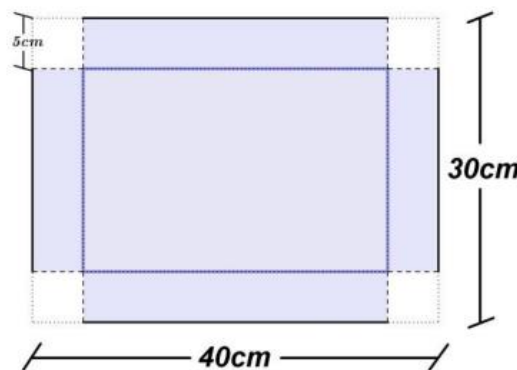
**18. (INEP-MEC)** A cerâmica possui a propriedade da contração, que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico submetido a uma determinada temperatura elevada: em seu lugar

aparecendo "espaços vazios" que tendem a se aproximar. No lugar antes ocupado pela água vão ficando lacunas e, consequentemente, o conjunto tende a retrair-se. Considere que no processo de cozimento a cerâmica de argila sofra uma contração, em dimensões lineares, de 20%.

Levando em consideração o processo de cozimento e a contração sofrida, o volume  $V$  de uma travessa de argila, de forma cúbica de aresta  $a$ , diminui para um valor que é

- (A) 20% menor que  $V$ , uma vez que o volume do cubo é diretamente proporcional ao comprimento de seu lado.  
(B) 36% menor que  $V$ , porque a área da base diminui de  $a^2$  para  $((1 - 0,2)a)^2$ .  
(C) 48,8% menor que  $V$ , porque o volume diminui de  $a^3$  para  $(0,8a)^3$ .  
(D) 51,2% menor que  $V$ , porque cada lado diminui para 80% do comprimento original.  
(E) 60% menor que  $V$ , porque cada lado diminui 20%.

**19. (IFPE)** Uma folha retangular de papelão de 40cm por 30cm será utilizada para confeccionar uma caixa, sem tampa, em forma de paralelepípedo, de base retangular. Para isso, deve-se, a partir desta folha de papelão, retirar 4 quadrados de lado 5cm, de cada um dos vértices e, em seguida, dobrar os lados, conforme a figura abaixo:

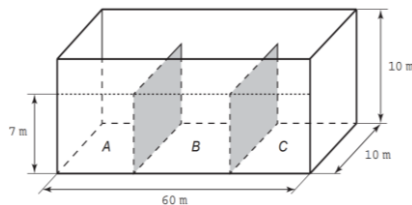


Determine, em litros, o volume dessa caixa.

- (A) 3 litros  
(B) 2 litros  
(C) 1 litro  
(D) 4 litros  
(E) 5 litros

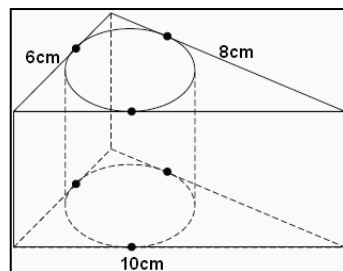
**20. (INEP-MEC)** Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por  $60 \text{ m} \times 10 \text{ m}$  de base e  $10 \text{ m}$  de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é

subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará. Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de



- (A)  $1,4 \times 10^3 \text{ m}^3$   
(B)  $1,8 \times 10^3 \text{ m}^3$   
(C)  $2,0 \times 10^3 \text{ m}^3$   
(D)  $3,2 \times 10^3 \text{ m}^3$   
(E)  $6,0 \times 10^3 \text{ m}^3$

**21. (INEP-MEC)** Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.

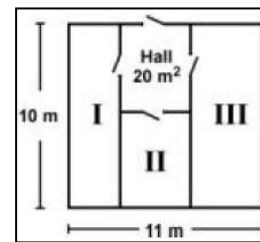


O raio da da peça e igual a:

- (A) 1cm  
(B) 2cm  
(C) 3cm  
(D) 4cm  
(E) 5cm

**22. (INEP-MEC)** Em uma empresa, existe um galpão que precisa ser dividido em três depósitos e um hall de entrada de  $20\text{m}^2$ , conforme a figura. Os depósitos I, II e III serão construídos para o armazenamento de, respectivamente, 90, 60 e 120 fardos de igual volume, e suas áreas devem

ser proporcionais a essas capacidades. A largura do depósito III dever ser, em metros, igual a:

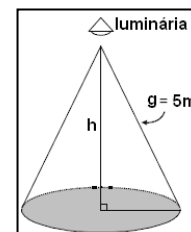


- (A) 1  
(B) 2  
(C) 3  
(D) 4  
(E) 5

**23. (INEP-MEC)** Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3cm de largura, 18cm de comprimento e 4cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a:

- (A) 5 cm  
(B) 6 cm  
(C) 12 cm  
(D) 24 cm  
(E) 25 cm

**24. (INEP-MEC)** Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura. Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de  $28,26\text{m}^2$ , considerando  $\pi = 3,14$ , a altura  $h$  será igual a:



- (A) 3 m  
(B) 4 m  
(C) 5 m  
(D) 9 m  
(E) 16 m



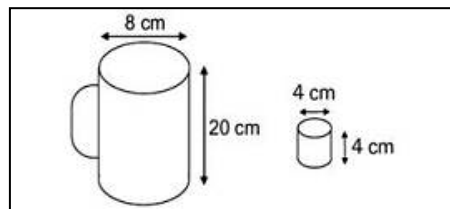
**25. (INEP-MEC)** Uma empresa de refrigerantes, que funciona sem interrupções, produz um volume constante de  $1800000\text{cm}^3$  de líquido por dia. A máquina de encher garrafas apresentou um defeito durante 24 horas. O inspetor de produção percebeu que o líquido chegou apenas à altura de 12cm dos 20cm previstos em cada garrafa. A parte inferior da garrafa em que foi depositado o líquido tem forma cilíndrica com raio da base de 3cm. Por questões de higiene, o líquido já engarrafado não será reutilizado. Utilizando  $\pi = 3$ , no período em que a máquina apresentou defeito, aproximadamente quantas garrafas foram utilizadas?

- (A) 555
- (B) 5555
- (C) 1333
- (D) 13333
- (E) 133333

**26. (INEP-MEC)** Certa marca de suco é vendida no mercado em embalagens tradicionais de forma cilíndrica. Relançando a marca, o fabricante pôs à venda embalagens menores, reduzindo a embalagem tradicional à terça parte de sua capacidade. Por questões operacionais, a fábrica que fornece as embalagens manteve a mesma forma, porém reduziu à metade o valor do raio da base da embalagem tradicional na construção da nova embalagem. Para atender à solicitação de redução da capacidade, após a redução no raio, foi necessário determinar a altura da nova embalagem. Que expressão relaciona a medida da altura da nova embalagem de suco (a) com a altura da embalagem tradicional (h)?

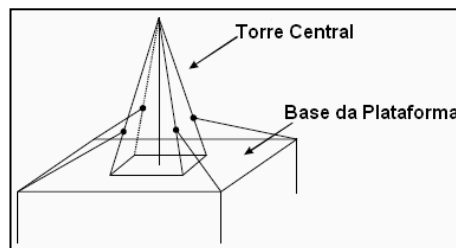
- (A)  $a = \frac{h}{12}$
- (B)  $a = \frac{h}{6}$
- (C)  $a = \frac{2h}{3}$
- (D)  $a = \frac{4h}{3}$
- (E)  $a = \frac{2h}{3}$

**27. (INEP-MEC)** Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos. Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá:



- (A) Encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- (B) Encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- (C) Encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- (D) Encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- (E) Encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

**28. (INEP-MEC)** Devido aos fortes ventos, uma empresa exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança de suas plataformas marítimas, colocando cabos de aço para melhor afixar a torre central. Considere que os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma extremidade no ponto médio das arestas laterais da torre central (pirâmide quadrangular regular) e a outra no vértice da base da plataforma (que é um quadrado de lados paralelos aos lados da base da torre central e centro coincidente com o centro da base da pirâmide), como sugere a ilustração. Se a altura e a aresta da base da torre central medem, respectivamente, 24 m e  $6\sqrt{2}$  m e o lado da base da plataforma mede  $19\sqrt{2}$  m, então a medida, em metros, de cada cabo será igual a:



- (A)  $\sqrt{288}$
- (B)  $\sqrt{313}$

(D)  $\sqrt{400}$

(E)  $\sqrt{505}$

**29. (INEP-MEC)** Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2m de diâmetro e 4m de altura (de espessura desprezível), foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20cm de espessura. Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R\$10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado de  $\pi$ , então o preço dessa manilha é igual a:

(A) R\$ 230,40

(B) R\$ 124,00

(C) R\$104,16

(D) R\$ 54,56

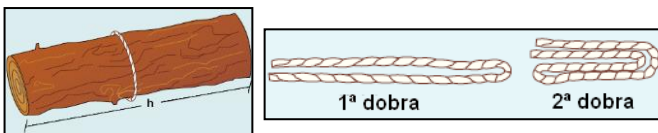
(E) R\$ 49,60

**30. (INEP-MEC)** Em muitas regiões do Estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:

**I.** Dá-se uma volta completa em torno do tronco comum barbante.

**II.** O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento é medido com fita métrica.

**III.** O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Esse é o volume estimado de madeira.



Outra estimativa pode ser obtida pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito. A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização. Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de:

(A) 30%

(B) 22%

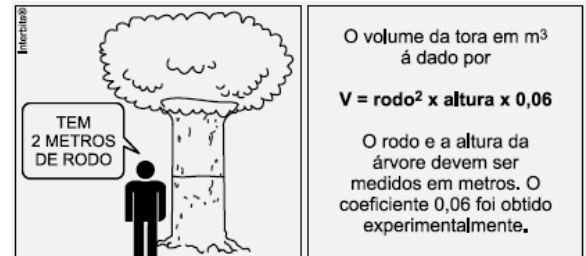
(C) 15%

(D) 12%

(E) 5% .

**31. (INEP-MEC)** No manejo sustentável de florestas, é preciso muitas vezes obter o volume da tora que pode ser

obtida a partir de uma árvore. Para isso, existe um método prático, em que se mede a circunferência da árvore à altura do peito de um homem (1,30m), conforme indicado na figura. A essa medida denomina-se "rodo" da árvore. O quadro a seguir indica a fórmula para se *cubar*, ou seja, obter o volume da tora em  $m^3$  a partir da medida do rodo e da altura da árvore.



Um técnico em manejo florestal recebeu a missão de *cubar*, abater e transportar cinco toras de madeira, de duas espécies diferentes, sendo:

- 3 toras da espécie I, com 3 m de rodo, 12 m de comprimento e densidade 0,77 toneladas/ $m^3$ ;

- 2 toras da espécie II, com 4 m de rodo, 10 m de comprimento e densidade 0,78 toneladas/ $m^3$ .

Após realizar seus cálculos, o técnico solicitou que enviassem caminhões para transportar uma carga de, aproximadamente,

(A) 29,9 toneladas

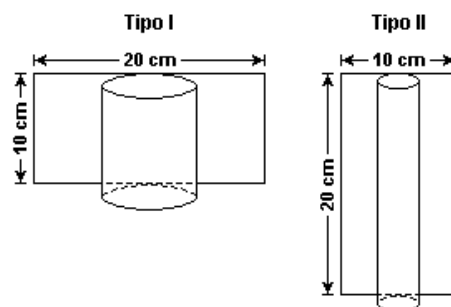
(B) 31,1 toneladas

(C) 32,4 toneladas

(D) 35,3 toneladas

(E) 41,8 toneladas

**32. (INEP-MEC)** Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm  $\times$  10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina:



Supondo-se que o custo da vela seja diretamente

proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será:

- (A) o triplo.
- (B) o dobro.
- (C) igual.
- (D) a metade.
- (E) a terça parte.

**33. (INEP-MEC)** A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano  $\alpha$  é paralelo à linha do equador na figura.



A projeção ortogonal, no plano  $\alpha$ , do caminho traçado no globo pode ser representada por

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E)

# RASCUNHOS

57



Daniel França  
matemática

# RASCUNHOS

53



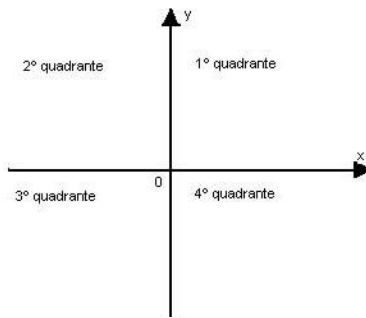
Daniel França  
matemática



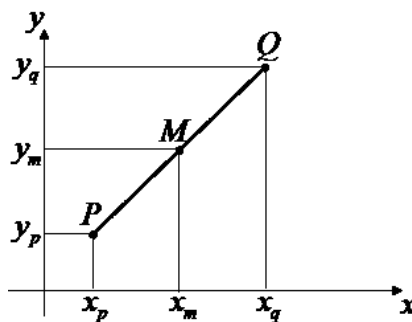


O Plano Cartesiano foi criado por René Descartes, com o intuito de localizar **pontos** no espaço. O aprofundamento dos estudos estabeleceu relações entre a álgebra e a **geometria** contribuindo na criação da **Geometria Analítica**, que objetiva pela análise das propriedades de figuras geométricas.

♣ O plano cartesiano

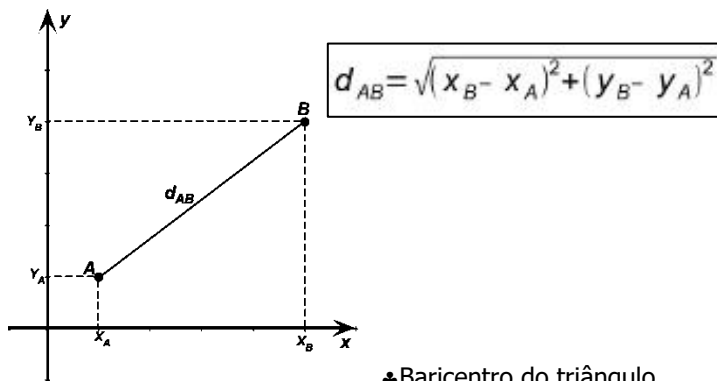


♣ Ponto médio

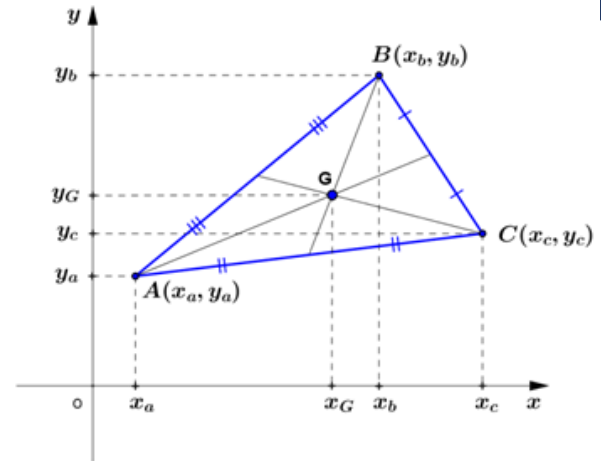


$$M \left( \frac{x_q + x_p}{2}, \frac{y_q + y_p}{2} \right)$$

♣ Distância entre dois pontos

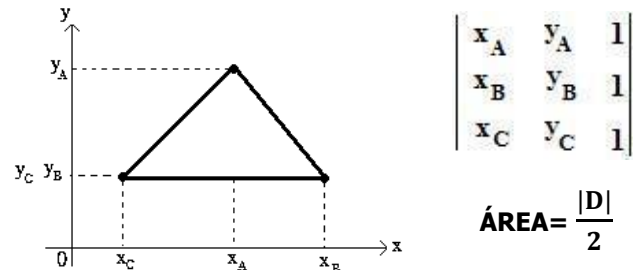


♣ Baricentro do triângulo



$$G \left( \frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \right)$$

♣ A área do triângulo pelas coordenadas dos seus vértices:



♣ Pontos alinhados determinarão uma **reta**, logo,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

♣ Retas...

♣ Equação reduzida:

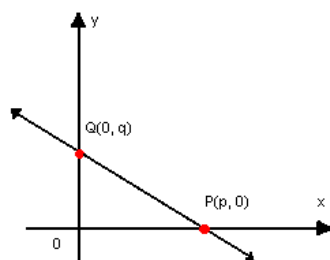
$$Y = mx + n$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

♣ Equação geral:

$$ax + by + c = 0$$

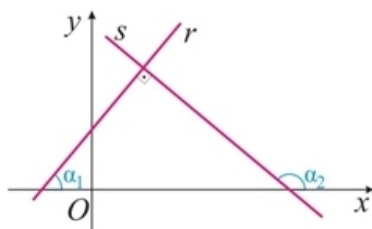
♣ Equação segmentária:



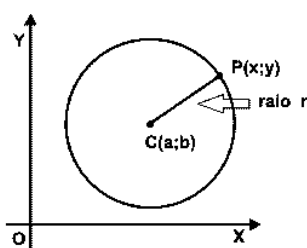
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

- ♣ Retas paralelas possuem mesmo coeficiente angular (m)
- ♣ Retas concorrentes possuem coeficientes angulares diferentes
- ♣ Retas perpendiculares possuem coeficientes angulares opostos do inverso:

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$



♣ Circunferências...



$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Equação reduzida  
da circunferência

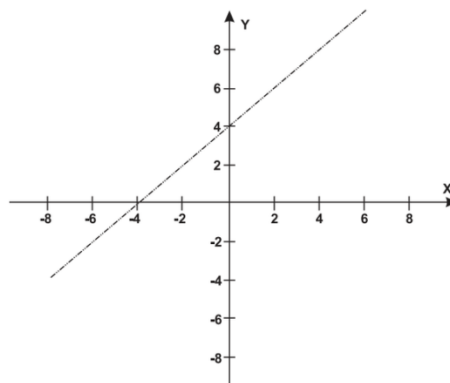
Equação geral  
da circunferência

## Exercícios

**1. (INEP-MEC)** Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros. A reta de equação  $y = x + 4$  representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto  $P = (-5, 5)$ , localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse

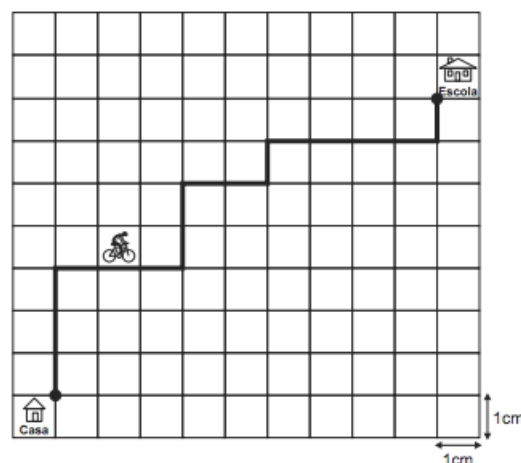
maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto



- A)  $(-5, 0)$ .
- B)  $(-3, 1)$ .
- C)  $(-2, 1)$ .
- D)  $(0, 4)$ .
- E)  $(2, 6)$ .

**2. (INEP-MEC)** A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza, para cada aluno de uma escola municipal, uma bicicleta, que deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre sua casa e a escola. Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura, na escala 1 : 25 000, por um período de cinco dias.



Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?

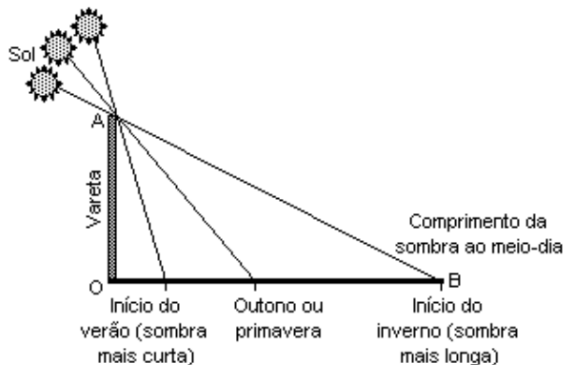
- (A) 4
- (B) 8
- (C) 16
- (D) 20
- (E) 40

**3. (INEP-MEC)** Há mais de 5.000 anos os egípcios observaram que a sombra no chão provocada pela



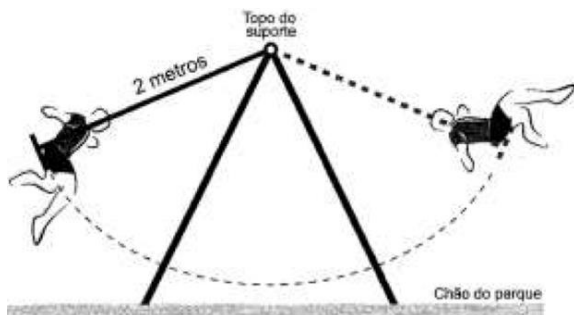
incidência dos raios solares de um gnômon (um tipo de vareta) variava de tamanho e de direção. Com medidas feitas sempre ao meio dia, notaram que a sombra, com o passar dos dias, aumentava de tamanho. Depois de chegar a um comprimento máximo, ela recuava até perto da vareta. As sombras mais longas coincidiam com dias frios. E as mais curtas, com dias quentes.

Um estudante fez uma experiência semelhante à descrita no texto, utilizando uma vareta OA de 2 metros de comprimento. No início do inverno, mediu o comprimento da sombra OB, encontrando 8 metros. Utilizou, para representar sua experiência, um sistema de coordenadas cartesianas, no qual o eixo das ordenadas (y) e o eixo das abscissas (x) continham, respectivamente, os segmentos de reta que representavam a vareta e a sombra que ela determinava no chão. Esse estudante pôde, assim, escrever a seguinte equação da reta que contém o segmento AB:



- (A)  $y = 8 - 4x$   
(B)  $x = 6 - 3y$   
(C)  $x = 8 - 4y$   
(D)  $y = 6 - 3x$   
(E)  $y = 4 - 7x$

**4. (INEP-MEC)** A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é o paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.

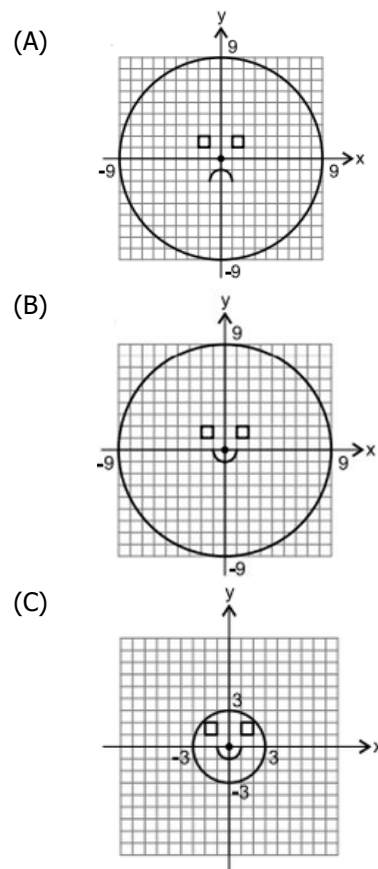
A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

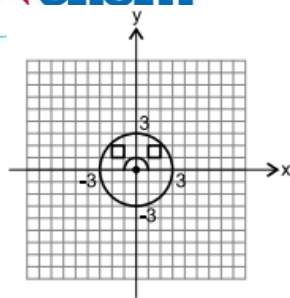
- A  $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$   
B  $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$   
C  $f(x) = x^2 - 2$   
D  $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$   
E  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

**5. (INEP-MEC)** Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

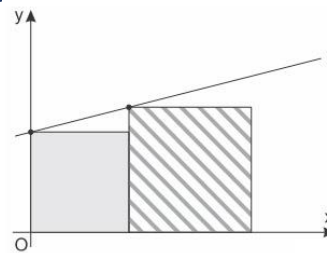
- I – é a circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 9$ ;  
II – é a parábola de equação  $y = -x^2 - 1$ , com x variando de -1 a 1;  
III – é o quadrado formado pelos vértices (-2, 1), (-1, 1), (-1, 2) e (-2, 2);  
IV – é o quadrado formado pelos vértices (1, 1), (2, 1), (2, 2) e (1, 2); V – é o ponto (0, 0).

**Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?**



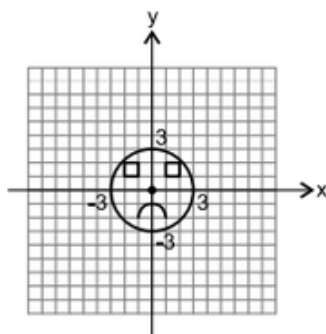


(D)



- (A)  $X - 2Y = -4$   
(B)  $4X - 9Y = 0$   
(C)  $2X + 3Y = -1$   
(D)  $X + Y = 3$   
(E)  $2X - Y = 3$

(E)



6. (CERGRANRIO)

A área do triângulo cujos vértices são os pontos (1,2), (3,5) e (4,-1) vale:

- (A) 4,5  
(B) 6  
(C) 7,5  
(D) 9  
(E) 15

7. (CERGRANRIO) A equação da reta mostrada na figura a seguir é:

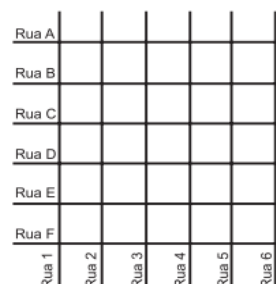
- (A)  $3x + 4y - 12 = 0$   
(B)  $3x - 4y + 12 = 0$   
(C)  $4x + 3y + 12 = 0$   
(D)  $4x - 3y - 12 = 0$   
(E)  $4x - 3y + 12 = 0$

8. (Upe) Sobre a equação reduzida da reta que intercepta o eixo y no ponto (0,4) e o eixo x no ponto (2,0), é correto afirmar que o coeficiente angular

- (A) da reta será um número positivo ímpar.  
(B) da reta será um número positivo par.  
(C) da reta será um número negativo cujo módulo é um número ímpar.  
(D) da reta será um número negativo cujo módulo é um número par.  
(E) da reta é nulo.

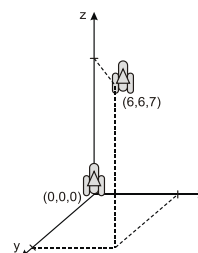
9. (UFPR) Na figura abaixo estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado. Nessas condições, a equação da reta r é:

10. (INEP-MEC) Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas. A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A. Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas



- (A) 3 e C.  
(B) 4 e C.  
(C) 4 e D.  
(D) 4 e E.  
(E) 5 e C.

11. (INEP-MEC) Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6, 6, 7) no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros.

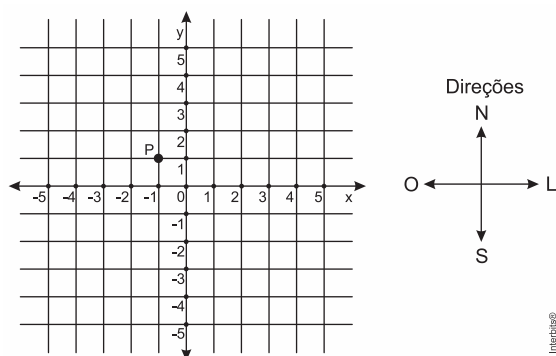


Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo-x, 3



km para trás na direção do eixo-y, e 11 km para frente, na direção do eixo-z, então o foguete atingiu a posição  
(A) (17, 3, 9).  
(B) (8, 3, 18).  
(C) (6, 18, 3).  
(D) (4, 9, - 4).  
(E) (3, 8, 18).

**12. (INEP-MEC)** Alunos de um curso de engenharia desenvolveram um robô "anfíbio" que executa saltos somente nas direções norte, sul, leste e oeste. Um dos alunos representou a posição inicial desse robô, no plano cartesiano, pela letra P, na ilustração.

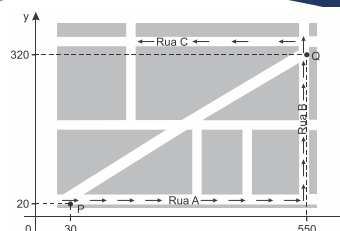


A direção norte-sul é a mesma do eixo y, sendo que o sentido norte é o sentido de crescimento de y, e a direção leste-oeste é a mesma do eixo x, sendo que o sentido leste é o sentido de crescimento de x. Em seguida, esse aluno deu os seguintes comandos de movimentação para o robô: 4 norte, 2 leste e 3 sul, nos quais os coeficientes numéricos representam o número de saltos do robô nas direções correspondentes, e cada salto corresponde a uma unidade do plano cartesiano.

Depois de realizar os comandos dados pelo aluno, a posição do robô, no plano cartesiano, será

- (A) (0; 2).  
(B) (0; 3).  
(C) (1; 2).  
(D) (1; 4).  
(E) (2; 1).

**13- (INEP-MEC)** Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.

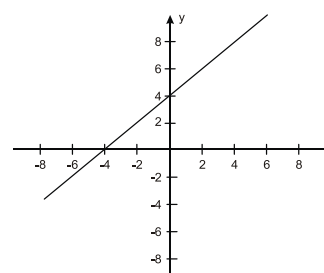


Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.

De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

- (A) (290; 20).  
(B) (410; 0).  
(C) (410; 20).  
(D) (440; 0).  
(E) (440; 20).

**14. (INEP-MEC)** Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação  $y = x + 4$  representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto  $P = (-5, 5)$ , localiza-se um hospital público. A

comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

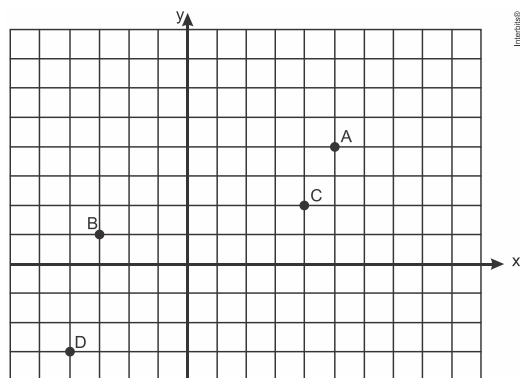
Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seja automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto

- (A)  $(-5, 0)$ .  
(B)  $(-3, 1)$ .  
(C)  $(-2, 1)$ .  
(D)  $(0, 4)$ .  
(E)  $(2, 6)$ .

15. ( INEP-MEC) Considere

que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano, sendo a origem o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desconsideradas e todos os quarteirões são quadrados de mesma área e a medida de seu lado é a unidade do sistema.

A seguir há uma representação dessa situação, em que os pontos A, B, C e D representam estabelecimentos comerciais desse bairro.



1 quarteirão: ☐

Suponha que uma rádio comunitária, de fraco sinal, garanta área de cobertura para todo estabelecimento que se encontre num ponto cujas coordenadas satisfaçam à inequação:  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leq 0$ .

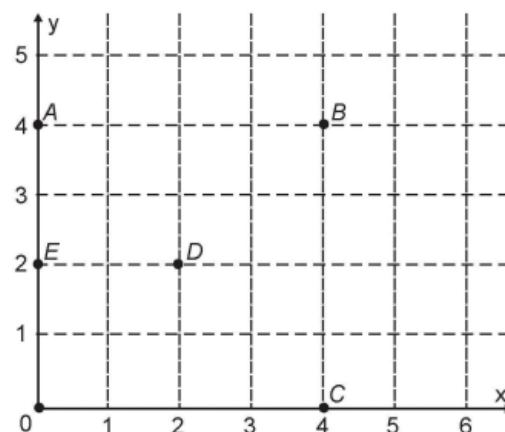
A fim de avaliar a qualidade do sinal, e proporcionar uma futura melhora, a assistência técnica da rádio realizou uma inspeção para saber quais estabelecimentos estavam dentro da área de cobertura, pois estes conseguem ouvir a rádio enquanto os outros não.

Os estabelecimentos que conseguem ouvir a rádio são apenas

- a) A e C.
- b) B e C.
- c) B e D.
- d) A, B e C.
- e) B, C e D.

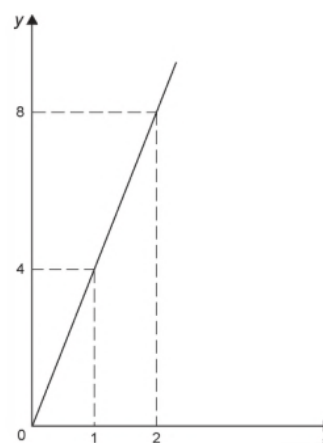
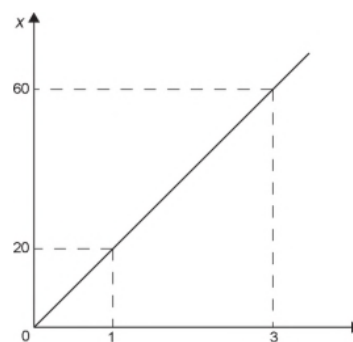
16. ( INEP-MEC) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros", seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A(0 ; 4), B(4 ; 4), C(4 ; 0), D(2 ; 2) e E(0; 2).

Passando pelo ponto A, qual equação forneceria a maior pontuação?



- a)  $x = 0$
- b)  $y = 0$
- c)  $x^2 + y^2 = 16$
- d)  $x^2 + (y-2)^2 = 4$
- e)  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

17. ( INEP-MEC) A quantidade x de peças, em milhar, produzidas e o faturamento y, em milhar de real, de uma empresa estão representados nos gráficos, ambos em função do número t de horas trabalhadas por seus funcionários.



O número de peças que devem ser produzidas para se obter um faturamento de R\$ 10 000,00 é

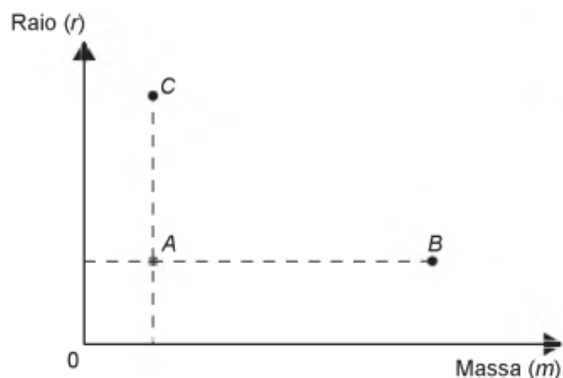
- (A) 2 000.
- (B) 2 500.
- (C) 40 000
- (D) 50 000.
- (E) 200 000

- (C)  $F_A < F_B < F_C$
- (D)  $F_A < F_C < F_B$
- (E)  $F_C < F_A < F_B$

**18. ( INEP-MEC)** De acordo com a Lei Universal da Gravitação, proposta por Isaac Newton, a intensidade da força gravitacional  $F$  que a Terra exerce sobre um satélite em órbita circular é proporcional à massa  $m$  do satélite e inversamente proporcional ao quadrado do raio  $r$  da órbita, ou seja,

$$F = \frac{km}{r^2}$$

No plano cartesiano, três satélites, A, B e C, estão representados, cada um, por um ponto ( $m$  ;  $r$ ) cujas coordenadas são, respectivamente, a massa do satélite e o raio da sua órbita em torno da Terra.



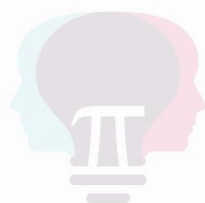
Com base nas posições relativas dos pontos no gráfico, deseja-se comparar as intensidades  $F_A$ ,  $F_B$  e  $F_C$  da força gravitacional que a Terra exerce sobre os satélites A, B e C, respectivamente.

As intensidades  $F_A$ ,  $F_B$  e  $F_C$  expressas no gráfico satisfazem a relação

- (A)  $F_C = F_A < F_B$
- (B)  $F_A = F_B < F_C$

# RASCUNHOS

67



Daniel França  
matemática

# RASCUNHOS

63



Daniel França  
matemática

# MATEMÁTICA FINANCEIRA

69





## MÓDULO 6 Matemática financeira – Juros

A questão dos juros atinge “as mais diversas e surpreendentes esferas da vida prática, social e espiritual, a começar pelo processo de envelhecimento a que nossos corpos estão inescapavelmente sujeitos”, escreveu o economista Eduardo Gianetti da Fonseca no livro *O Valor do Amanhã* (Companhia das Letras, 2005). Segundo ele, o deterioramento da saúde na velhice é o juro que se paga pela longevidade. Paga-se no futuro o que se aproveita no presente. O conceito de juros é quase tão antigo quanto o uso da moeda. Eles são a remuneração pelo capital – ou seja, a forma de recompensar quem emprestou por esperar pela devolução do dinheiro. Estamos pagando para a pessoa (ou o banco) não gastar o dinheiro com outra coisa. O tamanho dos juros, porém, expressa também o medo que o empréstador tem de não ser pago. Em contextos em que há receio pelo cumprimento dos pagamentos, portanto, os juros sobem – dessa forma, o lucro maior nos empréstimos compensa os possíveis calotes que parte dos clientes, já se espera, deve dar. E também, infelizmente, as pessoas que pagam em dia acabam pagando mais caro por causa das que dão calote. Há basicamente dois tipos de juro que são usualmente cobrados pelo mercado. O primeiro é o juro simples, cujo aumento percentual incide somente sobre o capital, isto é, o valor inicial da transação – seja empréstimo, compra ou renda. O segundo é conhecido como juro composto, pois seu aumento percentual incide sobre o agregado do capital e de juros anteriores ao período. Isto é, é um juro que incide pelo juro já cobrado – daí o infame efeito “bola de neve”, que estudaremos a seguir. Neste módulo, veremos como você pode resolver problemas que envolvam os juros simples. Os juros simples são a maneira mais fácil de calcular juros. Aqui, eles incidem sobre o capital principal. Não são comumente usados nas finanças profissionais, porque os períodos de empréstimo geralmente ocorrem em vários meses e anos, mas são importantes para compreender o conceito de juros. Acompanhe um caso hipotético. Uma pessoa tem uma aplicação inicial (representada por  $C$ , de “capital”), uma taxa de juros ( $i$ , de “interesse”, nome dos juros em inglês e espanhol, geralmente representado em forma decimal) e um período ( $t$ , de “tempo” em meses, ou anos, ou dias, dependendo do contrato assinado). A fórmula é:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Se ela tomou emprestados R\$ 1.000,00, a uma taxa de juros de 5% ao mês (ou 0,05, na forma decimal), para pagar após dez meses, o cálculo do quanto vai pagar de juros fica assim:

$$J = 1.000 \cdot 0,05 \cdot 10$$

$$J = 500$$

Podemos unir essas duas equações em uma só. Com ela, todos os problemas que envolvam os juros simples podem ser resolvidos (a letra  $M$  significa “montante”):

$$M = C + J = C + C \cdot i \cdot t$$

Fatorando essa expressão, podemos simplificá-la e chegarmos à fórmula final dos juros:

$$M = C (1 + i \cdot t)$$

♣ Porcentagem é uma ferramenta importante para comparar grandezas diferentes. Ela pode ser calculada como uma proporção, multiplicando-se depois por 100 e inserindo o símbolo %.

♣ Determinar o valor que sofre uma transformação percentual é fundamental. Um aumento de 10% num salário de 1.000 reais significa um acréscimo de 100 reais ao contracheque. Posteriormente, um desconto de 10% no salário resultante, de 1.100 reais, significa um corte de 110 reais. Embora seja a mesma porcentagem, o tamanho do corte é diferente.

♣ Somar porcentagens de todos os subgrupos dentro de um grupo resulta sempre em 100%. As porcentagens podem passar de 100 se cada um dos indivíduos puder fazer mais de uma escolha.

♣ Multiplicar e dividir porcentagens é um risco. Use a regra de três para saber quanto uma porcentagem de um subgrupo significa dentro do grupo.

♣ Inflação é o fenômeno em que a correção monetária corrói o valor do dinheiro. No Brasil, esse processo se acelerou nas décadas de 1980 e 1990.

♣ Juros são a remuneração do capital – ou seja, o que se paga pelo direito de usar dinheiro alheio. Expressam a incerteza no recebimento.

♣ Juros simples são os juros aplicados apenas sobre o capital. Para calcular, use a fórmula  $J = C \cdot i \cdot t$ , em que  $C$  é o capital,  $i$  é a taxa e  $t$  é o tempo ou prazo.

♣ Montante é o capital somado de juros, ou o tamanho da dívida depois de remunerado o capital.

♣ Juros compostos, usados pelos bancos, acumulam juros sobre juros. Para calcular o montante, use a fórmula

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

, em que  $C$  é o capital,  $i$  é a taxa e  $t$  é o tempo ou prazo considerado.

♣ Pesquisas eleitorais usam porcentagens para mostrar a proporção dos eleitores que pretendem votar em cada candidato. Para decidir a eleição, porém, contam apenas os votos válidos.

♣ Ponto percentual é o conceito usado para dizer que alguém tinha 10% de intenção de voto e caiu para 5% das intenções – ou seja, perdeu 5 pontos percentuais, e não 5% das intenções que tinha. Novamente, é uma questão de qual é a base a que nos referimos.

♣ A arrecadação é o produto do preço pela quantidade.

♣ **O lucro é a receita subtraída do custo**

♣  $\text{Lucro} > 0 \rightarrow$  saldo positivo

♣  $\text{Lucro} < 0 \rightarrow$  Prejuízo

♣  $\text{Lucro} \geq 0 \rightarrow$  Não há prejuízo

♣  $\text{Lucro} \leq 0 \rightarrow$  Não há lucro

### Exercícios

**1. (FUVEST-SP)** Há um ano, Bruno comprou uma casa por R\$ 50.000,00. Para isso, tomou emprestados R\$ 10.000,00 de Edson e R\$ 10.000,00 de Carlos, prometendo devolver-lhes o dinheiro, após um ano, acrescido de 5% e 4% de juros, respectivamente. A casa se valorizou 3% durante esse período de um ano. Sabendo-se que Bruno vendeu a casa hoje e pagou o combinado a Edson e Carlos, o seu lucro foi de:

- (A) R\$ 400,00.
- (B) R\$ 500,00.
- (C) R\$ 600,00.
- (D) R\$ 700,00.
- (E) R\$ 800,00.

**2. (ENEM-MEC)** João deve 12 parcelas de R\$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R\$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse essa dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R\$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado. A opção que dá a João o menor gasto seria

- (A) renegociar suas dívidas com o banco.
- (B) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.
- (C) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.
- (D) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.

(E) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

**3. (INEP-MEC)** Um capital de R\$ 30.000,00 foi dividido em duas aplicações: a primeira pagou uma taxa de 8% de juros anuais; a outra, aplicação de risco, pagou uma taxa de 12% de juros anuais. Ao término de um ano, observou-se que os lucros obtidos em ambas as aplicações foram iguais. Assim sendo, a diferença dos capitais aplicados foi de:

- (A) R\$ 8.000,00.
- (B) R\$ 4.000,00.
- (C) R\$ 6.000,00.
- (D) R\$ 10.000,00.
- (E) R\$ 12.000,00.

**4. (PUC-PR)** Vidal fez um empréstimo de certo valor, para ser quitado ao final de quatro meses, em parcela única. A taxa de juros negociada com o gerente do banco foi de 5% ao mês. Exatamente um mês depois, sua namorada Madalena emprestou, do mesmo banco, um valor para ser pago ao final de três meses, também em parcela única, ou seja, ambos os empréstimos vencem no mesmo dia. Sabe-se que o valor emprestado por Vidal é superior a dois salários mínimos. (Considerar juros simples.). Considerando o que foi exposto, assinale a alternativa correta.

- (A) Se o casal emprestou valores iguais, ainda que Madalena pague uma taxa de juros 30% maior do que a taxa devida por Vidal, seu saldo devedor será menor do que o do seu namorado.
- (B) Se Madalena emprestou um valor 10% superior àquele emprestado por Vidal, a uma taxa de 3% ao mês, seu saldo devedor no vencimento será igual ao de Vidal.
- (C) Suponha que eles emprestaram valores iguais. Para que o saldo devedor de ambos coincida, a taxa de juros paga por Madalena deverá ser 40% superior à taxa paga por Vidal.
- (D) Se Madalena emprestou 10% a menos que Vidal, a uma taxa de juros equivalente ao dobro daquela devida por ele, eles terão saldos devedores iguais na data de vencimento.
- (E) Sem conhecer o valor absoluto de cada empréstimo, ou o valor exato de um salário mínimo, é impossível fazer qualquer avaliação.

**5. (INEP-MEC)** O Sr. Silva planejou passar, com sua família, as festas natalinas no Pantanal de Mato Grosso em uma pousada que cobra uma diária de R\$ 450,00, incluindo as refeições e os passeios turísticos. Fez uma reserva por 7 dias, devendo efetuar o pagamento antecipado no dia 4 de dezembro de 2003. Visando não sobrecarregar o orçamento do mês de dezembro, decidiu poupar de duas maneiras:

1.º - Depositar R\$ 2.000,00, no dia 3 de janeiro de 2003, em uma aplicação especial com taxa de juro composto de

[www.danielmatematica.com.br](http://www.danielmatematica.com.br)

dezembro de 2003.

2.º - Acumular bônus pelas compras efetuadas no cartão de crédito, podendo resgatá-los em 3 de dezembro de 2003, na forma de duas diárias.

A partir dessas informações, é possível afirmar que o montante reservado pelo Sr. Silva com essas maneiras de poupar será:

Admita  $(1,015^{11}) = 1,18$ .

- (A) suficiente para pagar a reserva, mas não lhe sobrarão para gastos extras.
- (B) suficiente para pagar a reserva e ainda lhe sobrarão R\$ 225,00 para gastos extras.
- (C) insuficiente e ainda lhe faltarão R\$ 110,00.
- (D) suficiente para pagar a reserva e ainda lhe sobrarão R\$ 110,00 para gastos extras.
- (E) insuficiente e lhe faltarão R\$ 225,00.

**6. (UNESP)** Alfredo costuma aplicar seu dinheiro em um fundo de investimento que lhe rende juro composto. Se ele planeja resgatar um montante de R\$ 13.100,00 daqui a 3 anos, qual o valor do depósito inicial, se a taxa de juros for igual a 10% ao ano?

- (A) R\$ 8.100,00.
- (B) R\$ 9.000,00.
- (C) R\$ 9.100,00.
- (D) R\$ 10.000,00.
- (E) R\$ 10.100,00.

#### Questões Complementares por habilidades

<b>C4</b>	<b>Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.</b>
<b>H15</b>	<b>Identificar a relação de dependência entre grandezas.</b>

**7. (INEP-MEC)** Um grupo de artesãos resolveu criar uma cooperativa para, entre outras coisas, realizar bazares itinerantes e vender seu produto diretamente ao consumidor. Cada associado doa 14% do valor de suas vendas para o fundo da cooperativa. Se a cooperativa possui gastos mensais de, no mínimo, R\$ 749,00, deve ser feito um esforço conjunto dos associados para venderem por mês um total de, pelo menos,

- (A) R\$ 10.486,00.
- (B) R\$ 8.709,30.
- (C) R\$ 5.350,00.
- (D) R\$ 1.048,60.
- (E) R\$ 8.538,60.

**H16**

**Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.**

**8. (INEP-MEC)** A escolha do presidente de uma associação de bairro foi feita através de uma eleição, na qual votaram 200 moradores. Após apuração de 180 dos 200 votos, o resultado da eleição era o seguinte:

Candidato I	47 votos
Candidato II	72 votos
Candidato III	61 votos

A partir dos dados, pode-se concluir que

- (A) o vencedor da eleição certamente será o candidato II.
- (B) dependendo dos votos que ainda não foram apurados, o candidato I poderá ser o vencedor da eleição.
- (C) o vencedor da eleição poderá ser o candidato II ou o candidato III.
- (D) como existem votos ainda não apurados, qualquer um dos três candidatos poderá ganhar a eleição.
- (E) o vencedor da eleição certamente será o candidato III.

**H17**

**Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.**

**9. (INEP-MEC)** Ao cobrir um jogo de basquete entre os times Azulão e Verdão, um repórter anotou os pontos feitos pelos dois jogadores que marcaram mais pontos nos dois times.

AZULÃO		VERDÃO	
João	30	Sivuca	18
Pedroca	20	Antony	36

Esse repórter considerou que o rendimento de um jogador durante um jogo é medido pela razão entre o número de pontos que faz e o total de pontos feitos pelo seu time. O Azulão ganhou do Verdão por 80 a 72. O repórter publicou corretamente que, naquela partida, em relação ao rendimento,

- (A) João foi o melhor de todos.
- (B) Antony foi o pior de todos.
- (C) Sivuca e Pedroca foram iguais.
- (D) João e Antony foram iguais.
- (E) Sivuca e Pedroca foram os melhores entre os quatro.

**H18**

**Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.**

**13. (INEP-MEC)** Uma empresa decidiu doar livros e cadernos aos alunos carentes de uma escola da sua vizinhança. Receberão os materiais escolares apenas os alunos que tenham menos de 10 faltas no ano e cujas famílias tenham renda de até 3 salários mínimos. Sabe-se que:

- ♣ a escola possui 1.000 alunos;
- ♣ 350 alunos têm menos de 10

faltas no ano;

- ♣ 700 alunos pertencem a famílias com renda de até 3 salários mínimos;
- ♣ 200 alunos não pertencem a nenhum dos grupos acima, ou seja, têm 10 ou mais faltas no ano e pertencem a famílias com renda superior a 3 salários mínimos.

A empresa deve enviar o material escolar para

- (A) 250 alunos.
- (B) 300 alunos.
- (C) 400 alunos.
- (D) 550 alunos.
- (E) 600 alunos.

# RASCUNHOS

74



Daniel França  
matemática

# RASCUNHOS

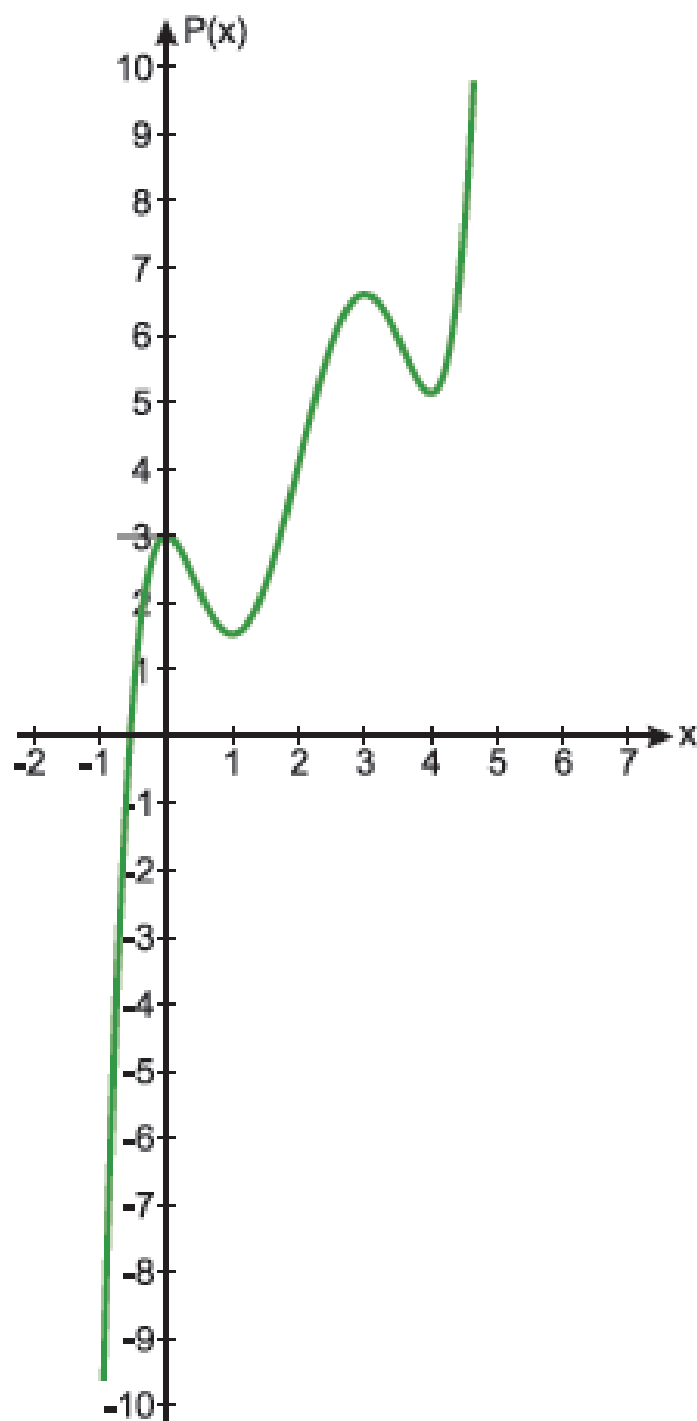
75



Daniel França  
matemática



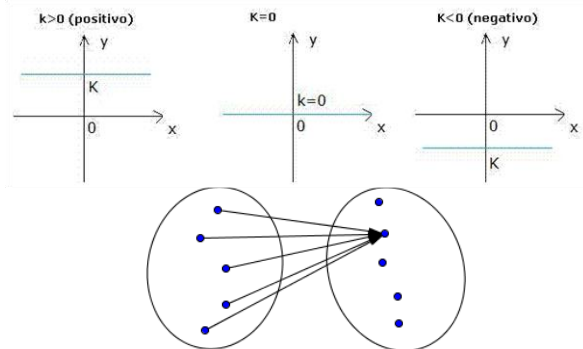
# ESTUDO DAS FUNÇÕES



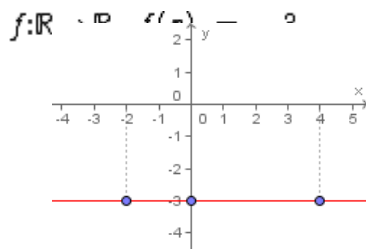
## Módulo 1- Função Constante

♣ Toda função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  na forma  $f(x) = k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ .

♣ Gráficos:



♣ EX:

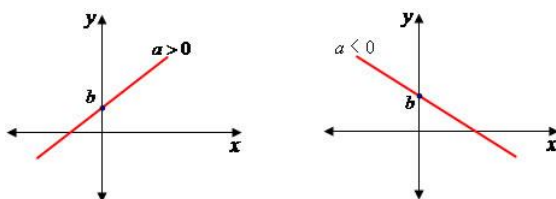


## Módulo 2- Função Afim

♣ Chama-se função do 1º grau, ou função afim, a qualquer função  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  forma  $f(x) = ax + b$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais dados e  $a \neq 0$ .

O número **a** é chamado de **coeficiente angular, taxa de variação** ou **declividade** eo número **b** é chamado **termo constante, coeficiente linear** ou **termo independente**.

♣ Gráficos:



O ponto onde a reta toca no eixo  $x$  (a raiz), corresponde a:  $-\frac{b}{a}$

O ponto em que a reta toca no eixo  $y$  corresponde ao valor de: **b**

O **comportamento** da reta dependerá sempre do valor de 'a'. se 'a' for positivo, a reta cresce, se for negativo, decresce.

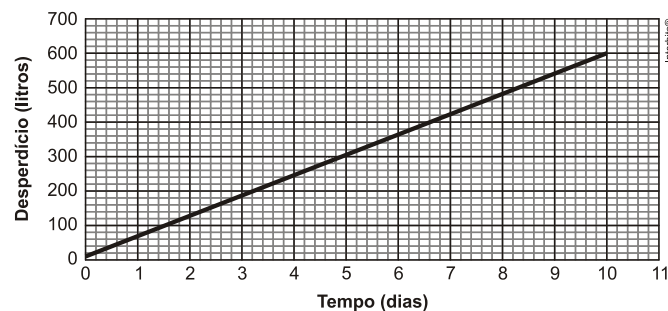
♣ Identifique nas funções abaixo seus coeficientes  $a$  e  $b$ , sua raiz e seu comportamento:

- |                                   |                                    |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| a) $f(x) = 3x + 2$                | f) $h(x) = \sqrt{3}x - \sqrt{324}$ |
| b) $f(x) = -8x + 4$               | g) $h(x) = -\sqrt[4]{81}x - 6$     |
| c) $f(x) = -10x - 20$             | h) $i(x) - 6 = 2x$                 |
| d) $g(x) = -(2x) - (-4)$          | i) $i(x) - 3x = 6$                 |
| e) $g(x) = -\frac{108}{12}x - 18$ | j) $i(x) + 144 + 6x = 0$           |



## EXERCÍCIOS

**01. (INEP-MEC)** Uma torneira gotejando diariamente é responsável por grandes desperdícios de água. Observe o gráfico que indica o desperdício de uma torneira:

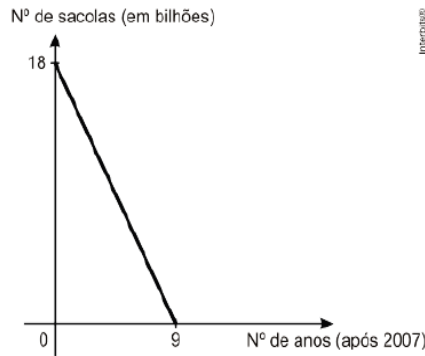


Se  $y$  representa o desperdício de água, em litros, e  $x$  representa o tempo, em dias, a relação entre  $x$  e  $y$  é

- $y = 2x$
- $y = \frac{1}{2}x$
- $y = 60x$
- $y = 60x + 1$
- $y = 80x + 50$

**02. (INEP-MEC)** As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o

ano de 2007.



LUCENA, M. Guerra às sacolinhas. *Galileu*. n.º 225, 2010.

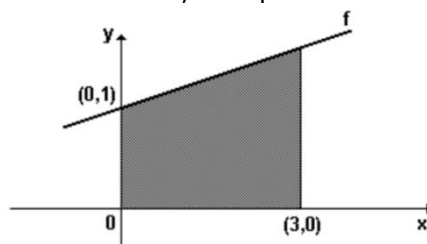
De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?

- (A) 4,0
- (B) 6,5
- (C) 7,0
- (D) 8,0
- (E) 10,0

**03. (UFES)** Uma produtora pretende lançar um filme em fita de vídeo e prevê uma venda de 20.000 cópias. O custo fixo de produção do filme foi R\$150.000,00 e o custo por unidade foi de R\$20,00 (fita virgem, processo de copiar e embalagem). Qual o preço mínimo que deverá ser cobrado por fita, para não haver prejuízo?

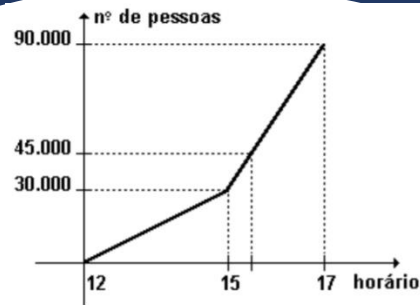
- (A) R\$ 20,00
- (B) R\$ 22,50
- (C) R\$ 25,00
- (D) R\$ 27,50
- (E) R\$ 35,00

**04. (UNIRIO)** Considere a figura anterior, onde um dos lados do trapézio retângulo se encontra apoiado sobre o gráfico de uma função  $f$ . Sabendo-se que a área da região sombreada é  $9\text{cm}^2$ , a lei que define  $f$  é:



- a)  $y = (7x/6) - 2$
- b)  $y = (3x/4) - 1$
- c)  $y = (2x/5) + 1$
- d)  $y = (5x/2) - 1$
- e)  $y = (4x/3) + 1$

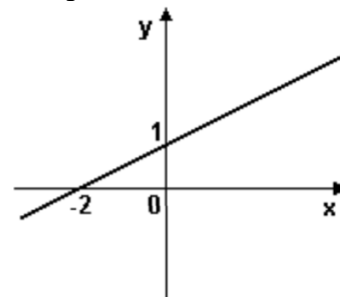
**05. (INEP-MEC)** Em uma partida, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90.000 torcedores. Três portões foram abertos às 12 horas e até as 15 horas entrou um número constante de pessoas por minuto. A partir desse horário, abriram-se mais 3 portões e o fluxo constante de pessoas aumentou. Os pontos que definem o número de pessoas dentro do estádio em função do horário de entrada estão contidos no gráfico a seguir:



Quando o número de torcedores atingiu 45.000, o relógio estava marcando 15 horas e:

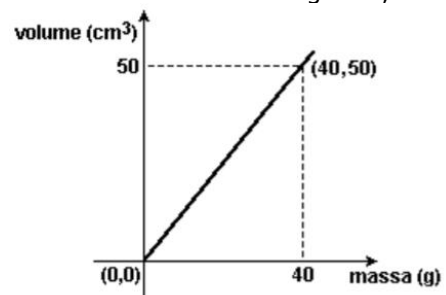
- (A) 20 min
- (B) 30 min
- (C) 40 min
- (D) 50 min
- (E) 55 min

**06. (PUC-MG)** O gráfico da função  $f(x) = ax + b$  está representado na figura. O valor de  $a + b$  é:



- (A) -1
- (B) 2/5
- (C) 3/2
- (D) 2
- (E) 3

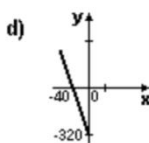
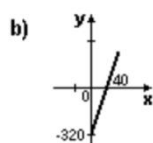
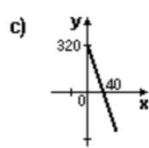
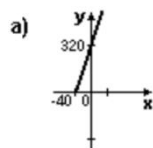
**07. (UNESP)** Apresentamos a seguir o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de  $0^\circ\text{C}$ . Baseado nos dados do gráfico, determine:



a) a lei da função apresentada no gráfico;

b) qual é a massa (em gramas) de  $30\text{ cm}^3$  de álcool.

**08. (UFRN)** Um comerciante decidiu fabricar camisetas de malha para vendê-las na praia, ao preço de R\$8,00 a unidade. Investiu no negócio R\$320,00. Sabendo que o lucro  $(y)$  obtido é função da quantidade de unidades vendidas  $(x)$ , o gráfico que mais se aproxima da representação dessa função é:



**09. (INEP-MEC)** Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.

*Revista Exame. 21 abr. 2010.*

A expressão que relaciona o valor  $f$  pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam  $x$  horas extras nesse período é

- (A)  $f(x) = 3x$
- (B)  $f(x) = 24$
- (C)  $f(x) = 27$
- (D)  $f(x) = 3x + 24$
- (E)  $f(x) = 24x + 3$

**10- ( INEP-MEC)** Leia o anúncio:

**VENDEDORES JOVENS**  
**Fábrica de LONAS - Vendas no Atacado**  
10 vagas para estudantes, 18 a 20 anos, sem experiência.  
Salário: R\$ 300,00 fixo + comissão de R\$ 0,50 por m<sup>2</sup> vendido.  
Contato: 0xx97-43421167 ou atacadista@lonaboa.com.br

Na seleção para as vagas deste anúncio, feita por telefone ou correio eletrônico, propunha-se aos candidatos uma questão a ser resolvida na hora. Deveriam calcular seu salário no primeiro mês, se vendessem 500 m de tecido com largura de 1,40 m, e no segundo mês, se vendessem o dobro. Foram bem sucedidos os jovens que responderam, respectivamente,

- (A) R\$ 300,00 e R\$ 500,00.
- (B) R\$ 550,00 e R\$ 850,00.
- (C) R\$ 650,00 e R\$ 1000,00.
- (D) R\$ 650,00 e R\$ 1300,00.
- (E) R\$ 950,00 e R\$ 1900,00

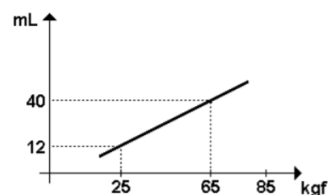
**11-(INEP-MEC)** A figura a seguir representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.

Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R\$ 500,00
Instruções	(-) Descontos
Observação : no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R\$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Se  $M(x)$  é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que  $x$  é o número de dias em atraso, então

- (A)  $M(x) = 500 + 0,4x$ .
- (B)  $M(x) = 500 + 10x$ .
- (C)  $M(x) = 510 + 0,4x$ .
- (D)  $M(x) = 510 + 40x$ .
- (E)  $M(x) = 500 + 10,4x$ .

**12- (UFRN)** Na figura a seguir, tem-se o gráfico de uma reta que representa a quantidade, medida em mL, de um medicamento que uma pessoa deve tomar em função de seu peso, dado em kgf, para tratamento de determinada infecção. O medicamento deverá ser aplicado em seis doses.



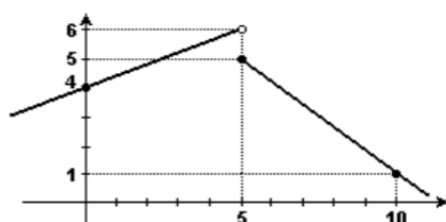
Assim, uma pessoa que pesa 85kgf receberá em cada dose:

- (A) 7 mL
- (B) 9 mL
- (C) 8 mL
- (D) 10 mL

**13. (UFLAVRAS)** Em relação à função  $f(x) = 3x + 2$ , assinale a alternativa INCORRETA:

- (A)  $f(4) - f(2) = 6$
- (B) O gráfico de  $f(x)$  é uma reta.
- (C) O gráfico de  $f(x)$  corta o eixo  $y$  no ponto  $(0, 2)$
- (D)  $f(x)$  é uma função crescente.
- (E)  $f(f(x)) = x^2 + 2x + 1$

**14. (UFPE)** A função, definida para todo número real  $x$ , cujo gráfico está representado abaixo, tem a seguinte lei de formação:



a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x + 4, & x < 5 \\ -\frac{4}{5}x + 9, & x \geq 5 \end{cases}$

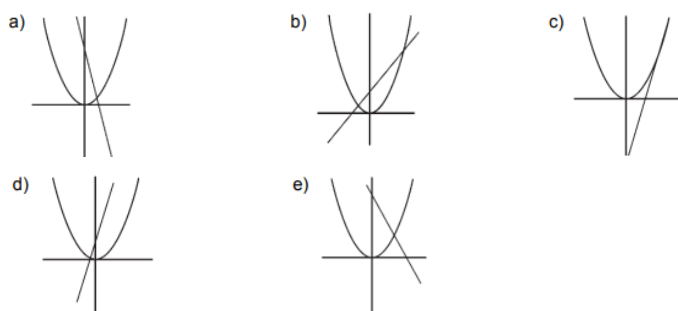
b)  $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{5}x + 4, & x < 5 \\ \frac{4}{5}x + 9, & x \geq 5 \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x + 4, & x < 5 \\ -\frac{5}{4}x + 9, & x \geq 5 \end{cases}$

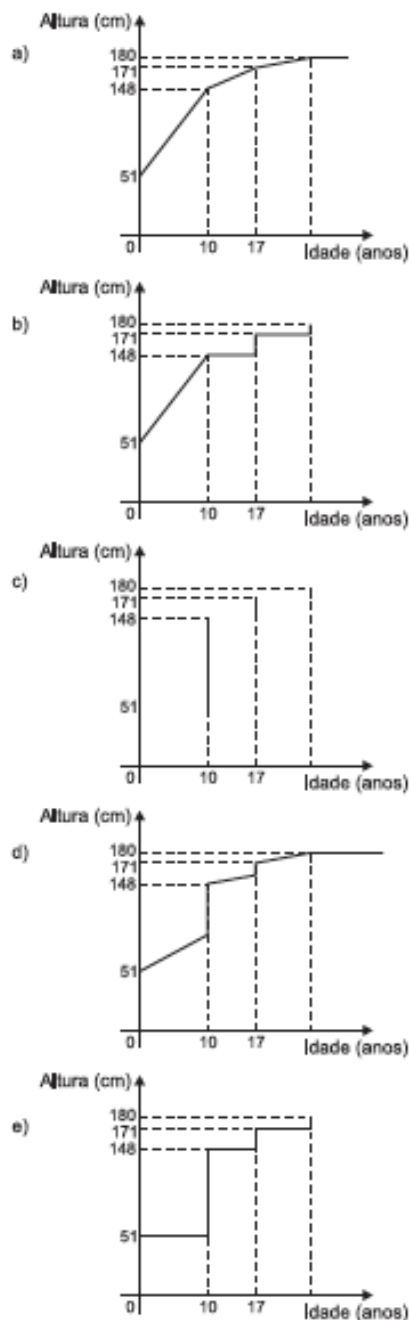
d)  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x + 4, & x < 5 \\ \frac{4}{5}x + 9, & x \geq 5 \end{cases}$

e)  $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x + 4, & x < 5 \\ \frac{5}{4}x + 9, & x \geq 5 \end{cases}$

**15. (UPE)** Qual das alternativas a seguir representa, conjuntamente, os esboços dos gráficos das funções reais  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = 4x - 4$ ?



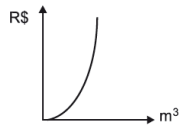
**16. (INEP-MEC)** Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas. **Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?**



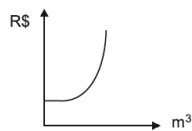
**17. (UFPE)** O síndico do edifício Castel Gandolfo, em reunião no último mês de abril de 2010, chamou atenção dos presentes à reunião, para o alto consumo de água durante os primeiros quatro meses do ano. Em sua explanação, ele relator que a empresa fornecedora de água possui diferentes tarifas para diferentes consumo, ou seja, até  $10\text{m}^3$  (tarifa mínima), o preço é constante. A partir desse volume, a cada  $1\text{m}^3$  consumido a mais o preço aumenta. Baseado nesses dados, o gráfico que melhor representa o valor da conta de água de acordo com o consumo é:



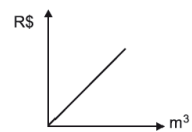
(B)



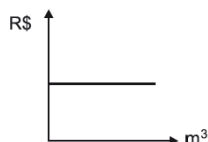
(C)



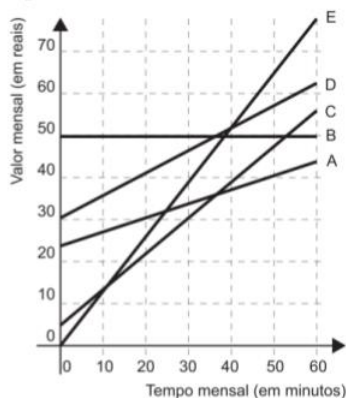
(D)



(E)



**18. (INEP-MEC)** No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



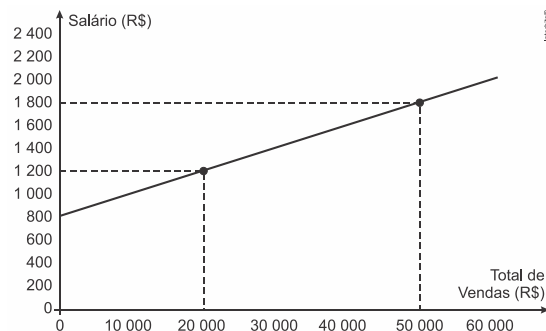
Essa pessoa pretende gastar exatamente R\$ 30,00 por mês com telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

- (A) A
- (B) B
- (C) C
- (D) D
- (E) E

**19. (INEP-MEC)** No comércio é comumente utilizado o salário mensal comissionado. Além de um valor fixo, o vendedor tem um incentivo, geralmente um percentual sobre as vendas. Considere um vendedor que tenha

salário comissionado, sendo sua comissão dada pelo percentual do total de vendas que realizar no período. O gráfico expressa o valor total de seu salário, em reais, em função do total de vendas realizadas, também em reais.



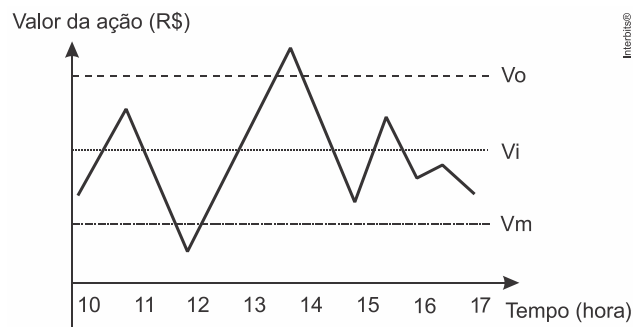
Qual o valor percentual da sua comissão?

- (A) 2,0%
- (B) 5,0%
- (C) 16,7%
- (D) 27,7%
- (E) 50,0%

**20. (INEP-MEC)** Um investidor inicia um dia com  $x$  ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações. Para realizar essas operações, ele segue estes critérios:

- I. vende metade das ações que possui, assim que seu valor fica acima do valor ideal ( $V_i$ );
- II. compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo ( $V_m$ );
- III. vende todas as ações que possui, quando seu valor fica acima do valor ótimo ( $V_o$ ).

O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo.



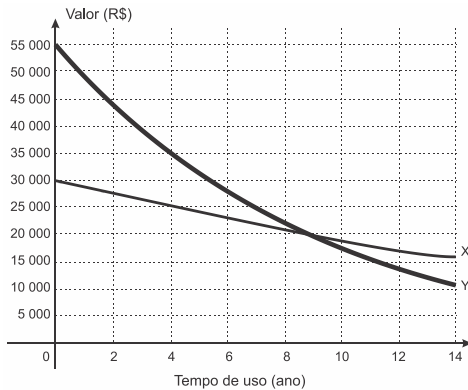
Quantas operações o investidor fez naquele dia?

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6
- (E) 7



**21. (INEP-MEC)** Alguns brasileiros têm o hábito de

trocar de carro a cada um ou dois anos, mas essa prática nem sempre é um bom negócio, pois o veículo desvaloriza com o uso. Esse fator é chamado de depreciação, sendo maior nos primeiros anos de uso. Uma pessoa realizou uma pesquisa sobre o valor de mercado dos dois veículos (X e Y) que possui. Colocou os resultados obtidos em um mesmo gráfico, pois os veículos foram comprados juntos.



Após a pesquisa, ela decidiu vender os veículos no momento em que completarem quatro anos de uso.

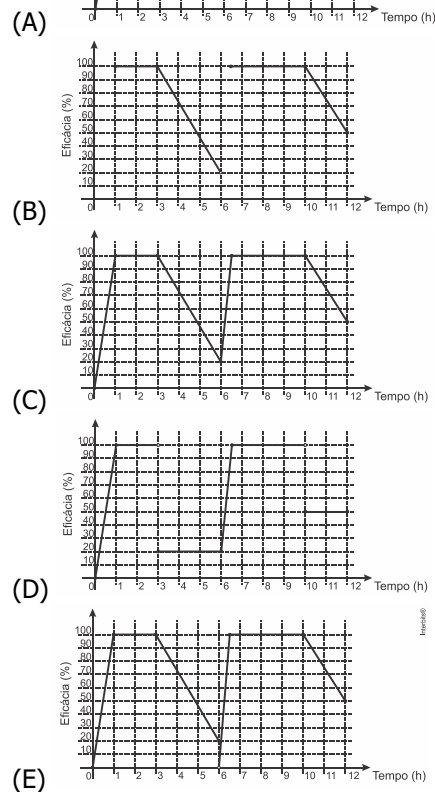
Disponível em: [www.carrosnaweb.com.br](http://www.carrosnaweb.com.br). Acesso em: 3 ago. 2012 (adaptado).

Considerando somente os valores de compra e de venda dos veículos por essa pessoa, qual a perda, em reais, que ela terá?

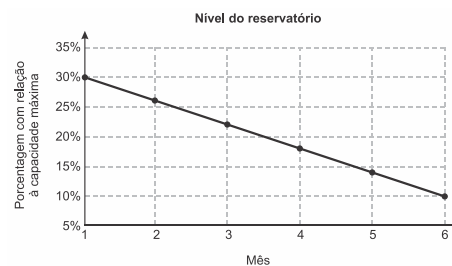
- (A) 10.000,00
- (B) 15.000,00
- (C) 25.000,00
- (D) 35.000,00
- (E) 45.000,00

**22. (INEP-MEC)** Uma empresa farmacêutica fez um estudo da eficácia (em porcentagem) de um medicamento durante 12 h de tratamento em um paciente. O medicamento foi administrado em duas doses, com espaçamento de 6 h entre elas. Assim que foi administrada a primeira dose, a eficácia do remédio cresceu linearmente durante 1 h, até atingir a máxima eficácia (100%), e permaneceu em máxima eficácia durante 2 h. Após essas 2 h em que a eficácia foi máxima, ela passou a diminuir linearmente, atingindo 20% de eficácia ao completar as 6 h iniciais de análise. Nesse momento, foi administrada a segunda dose, que passou a aumentar linearmente, atingindo a máxima eficácia após 0,5 h e permanecendo em 100% por 3,5 h. Nas horas restantes da análise, a eficácia decresceu linearmente, atingindo ao final do tratamento 50% de eficácia.

Considerando as grandezas tempo (em hora), no eixo das abscissas; e eficácia do medicamento (em porcentagem), no eixo das ordenadas, qual é o gráfico que representa tal estudo?



**23. (INEP-MEC)** Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.

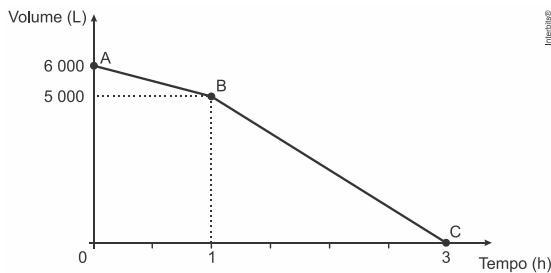


Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

- (A) 2 meses e meio.
- (B) 3 meses e meio.
- (C) 1 mês e meio.
- (D) 4 meses.
- (E) 1 mês.

**24. (INEP-MEC)** Uma cisterna de 6.000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim

de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.



Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

- (A) 1.000
- (B) 1.250
- (C) 1.500
- (D) 2.000
- (E) 2.500

**25. (INEP-MEC)** Os sistemas de cobrança dos serviços de táxi nas cidades A e B são distintos. Uma corrida de táxi na cidade A é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R\$ 3,45, mais R\$ 2,05 por quilômetro rodado. Na cidade B, a corrida é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R\$ 3,60, mais R\$ 1,90 por quilômetro rodado.

Uma pessoa utilizou o serviço de táxi nas duas cidades para percorrer a mesma distância de 6 km.

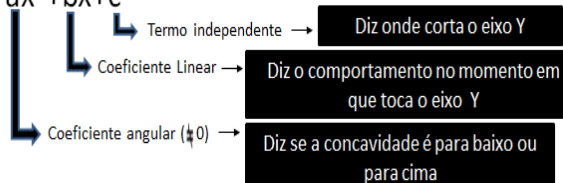
Qual o valor que mais se aproxima da diferença, em reais, entre as médias do custo por quilômetro rodado ao final das duas corridas?

- (A) 0,75
- (B) 0,45
- (C) 0,38
- (D) 0,33
- (E) 0,13

## Módulo 2- Função quadrática

♣ Denomina-se equação do 2º grau, qualquer sentença matemática que possa ser reduzida à forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , onde x é a incógnita e a, b e c são números reais, com  $a \neq 0$ . a, b e c são coeficientes da equação.

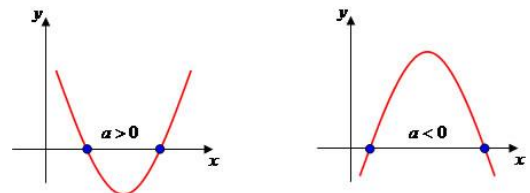
$$F(x) = ax^2 + bx + c$$



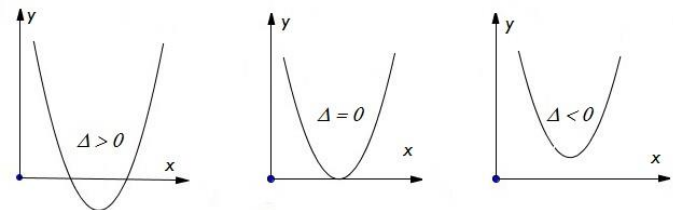
♣ A função tocará o eixo x somente se o valor de  $\Delta \geq 0$ . Caso isso aconteça, tocará no(s) ponto(s):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

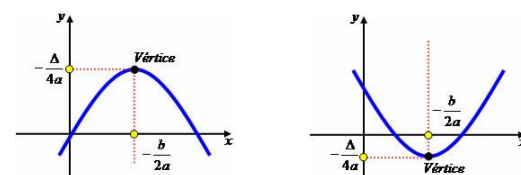
♣ O gráfico parabólico terá concavidade para cima, se o valor de  $a > 0$ . Caso seja  $a < 0$ , a concavidade será voltada para baixo:



♣ Quanto aos valores de **Delta**, teremos as seguintes condições das raízes:

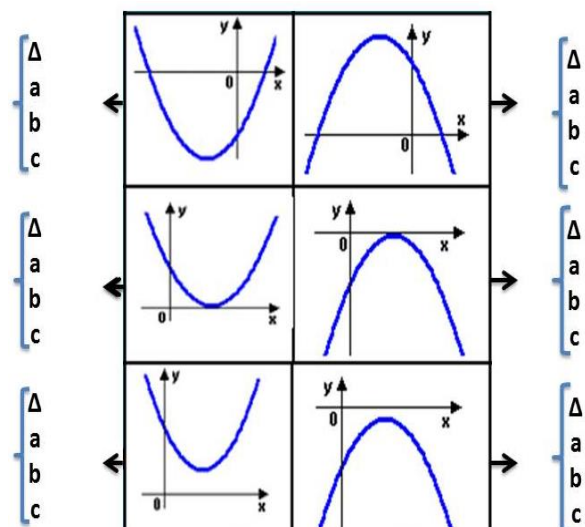


♣ Quanto ao ponto mais extremo superior ou inferior da parábola, atribui-se um nome de pontos do vértice, que terão



seguintes valores:

♣ Quanto aos valores de **Δ**, **a**, **b** e **C**, determine nos 6 casos abaixo se  $> 0$ ,  $< 0$  ou  $= 0$ .



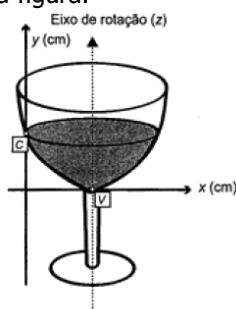
**01. (INEP-MEC)** Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão  $T(h) = -h^2 + 22h - 85$ , em que  $h$  representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T \leq 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como:

- (A) muito baixa.
- (B) baixa.
- (C) média.
- (D) alta.
- (E) muito alta.

**02. (INEP-MEC)** A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo  $z$ , conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$ , onde  $C$  é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto  $V$ , na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo  $x$ .

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça em centímetros, é

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 5
- (E) 6

**03. (INEP-MEC)** Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R\$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R\$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando  $x$  o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e  $V$  o valor, em R\$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona  $V$  e  $x$  é

- (A)  $V = 10.000 + 50x - x^2$ .
- (B)  $V = 10.000 + 50x + x^2$ .
- (C)  $V = 15.000 - 50x - x^2$ .
- (D)  $V = 15.000 + 50x - x^2$ .
- (E)  $V = 15.000 - 50x + x^2$ .

**04. (INEP-MEC)** Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$$y = 9 - x^2, \text{ sendo } x \text{ e } y \text{ medidos em metros.}$$

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a  $\frac{2}{3}$  da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel.

Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

- (A) 18
- (B) 20
- (C) 36
- (D) 45
- (E) 54

**05. (INEP-MEC)** Um meio de transporte coletivo que vem ganhando espaço no Brasil é a *van*, pois realiza, com relativo conforto e preço acessível, quase todos os tipos de transportes: escolar e urbano, intermunicipal e excursões em geral. O dono de uma *van*, cuja capacidade máxima é de 15 passageiros, cobra para uma excursão até a capital de seu estado R\$ 60,00 de cada passageiro. Se não atingir a capacidade máxima da *van*, cada passageiro pagará mais R\$ 2,00 por lugar vago.

Sendo  $x$  o número de lugares vagos, a expressão que representa o valor arrecadado  $V(x)$ , em reais, pelo dono da *van*, para uma viagem até a capital é

- (A)  $V(x) = 902x$
- (B)  $V(x) = 930x$
- (C)  $V(x) = 900 + 30x$
- (D)  $V(x) = 60 + 2x^2$
- (E)  $V(x) = 900 - 30x + 2x^2$

**06. (INEP-MEC)** Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial  $f$ , de grau menor que 3, para

seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função  $y = f(x)$  a ser utilizada pelo professor é

- (A)  $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$ .
- (B)  $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$ .
- (C)  $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$ .
- (D)  $y = \frac{4}{5}x + 2$ .
- (E)  $y = x$ .

**07. (INEP-MEC)** A temperatura  $T$  de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ( $t=0$ ) e varia de acordo com a expressão  $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$ , com  $t$  em minutos.

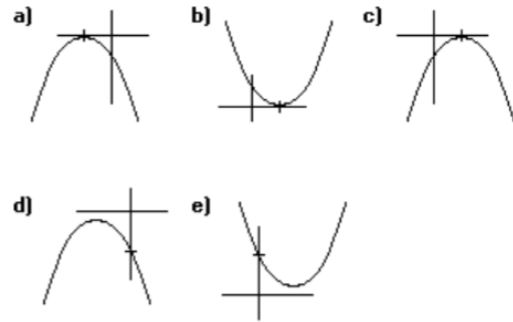
Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de  $39^\circ\text{C}$ . Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

- (A) 19,0
- (B) 19,8
- (C) 20,0
- (D) 38,0
- (E) 39,0

**08. (IFPE)** Numa Churrascaria especializada em rodízio de carnes, existe um espaço para 40 pessoas reservado para confraternizações. Nesse espaço, cobram-se de cada cliente R\$ 20,00 mais R\$ 2,00 por lugar vago. Qual o número de clientes presentes em uma confraternização para que a arrecadação da churrascaria seja máxima?

- (A) 15
- (B) 25
- (C) 1
- (D) 30
- (E) 40

**09. (UNESP)** Considere a função  $f(x) = \frac{1}{4a}x^2 + x + a$ , onde  $a$  é um número real não nulo. Assinale a alternativa cuja parábola poderia ser o gráfico dessa função.



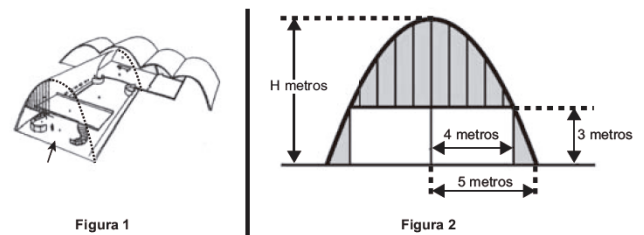
**10. (Uel)** A função real  $f$ , de variável real, dada por  $f(x) = -x^2 + 12x + 20$ , tem um valor

- (A) mínimo, igual a -16, para  $x = 6$
- (B) mínimo, igual a 16, para  $x = -12$
- (C) máximo, igual a 56, para  $x = 6$
- (D) máximo, igual a 72, para  $x = 12$
- (E) máximo, igual a 240, para  $x = 20$

**11. (UFSCAR-SP)** Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação  $h(t) = -2t^2 + 8t$  ( $t \geq 0$ ), onde  $t$  é o tempo medido em segundo e  $h(t)$  é a altura em metros da bola no instante  $t$ . Determine, após o chute:

- a) o instante em que a bola retornará ao solo.
- b) a altura atingida pela bola.

**12. (INEM-MEC)** A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

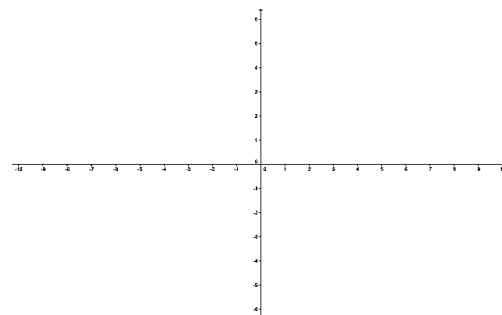
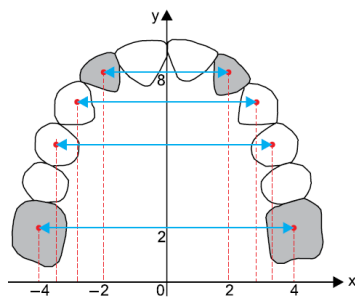


Qual a medida da altura  $H$ , em metro, indicada na Figura 2?

- a)  $16/3$
- b)  $31/5$
- c)  $25/4$
- d)  $25/3$
- e)  $75/2$

13. (FAMERP SP/2016) A

figura representa o desenho da arcada dentária de um animal, feito no plano cartesiano ortogonal em escala linear.

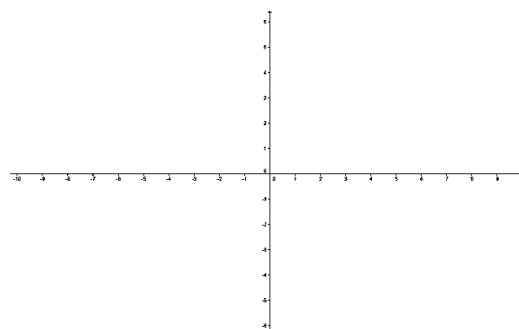


X	Y
-3	
-3	
-1	
0	

Sabendo que as posições dos centros dos dentes destacados em cinza nessa arcada são modeladas nesse plano por meio da função quadrática  $y = ax^2 + b$ , então  $a + b$  é igual a

- a) 8,5.
- b) 9,2.
- c) 9,5.
- d) 10,2.
- e) 9,0.

♣ Dada a função:  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , com  $0 < a < 1$ , teste alguns pontos com valores de  $x$  e marque os pontos no plano cartesiano:



X	Y
-3	
-3	
-1	
0	

### MÓDULO 3- FUNÇÃO EXPONENCIAL

♣  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $y = a^x$ , sendo que  $a > 1$  ou  $0 < a < 1$ .

♣ Lembrar das propriedades da potência:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

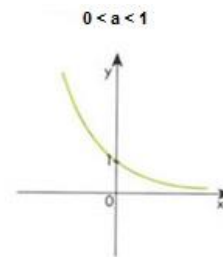
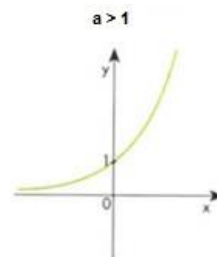
$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$a^{\left(\frac{k}{p}\right)} = \sqrt[p]{a^k}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \text{ com } n \text{ positivo}$$

♣ Dada a função:  $f(x) = 2^x$ , com  $a > 1$ , teste alguns pontos com valores de  $x$  e marque os pontos no plano cartesiano:

♣ Gráficos:



### EXERCÍCIOS

01. (CESGRANRIO) Se  $8^x = 32$ , então  $x$  é igual a:

- (A)  $\frac{5}{2}$ .
- (B)  $\frac{5}{3}$ .
- (C)  $\frac{3}{5}$ .
- (D)  $\frac{2}{5}$ .
- (E) 4.

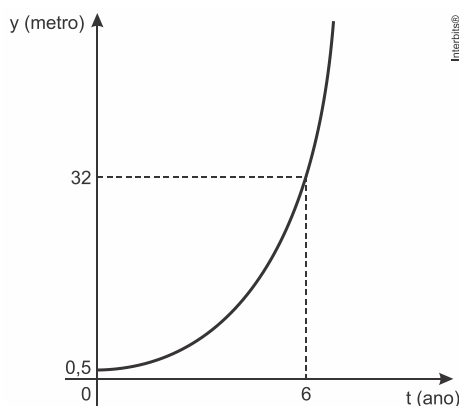


**02. (PUCMG, 2010)** O valor de certo equipamento, comprado por R\$ 60.000,00, é reduzido à metade a cada 15 meses. Assim, a equação

$V(t) = 60.000 \cdot 2^{-\frac{t}{15}}$ , onde  $t$  é o tempo de uso em meses e  $V(t)$  é o valor em reais, representa a variação do valor desse equipamento. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que o valor do equipamento após 45 meses de uso será igual a:

- (A) R\$ 3.750,00
- (B) R\$ 7.500,00
- (C) R\$ 10.000,00
- (D) R\$ 20.000,00

**03. (INEP-MEC)** Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função  $y(t) = a^{t-1}$ , na qual  $y$  representa a altura da planta em metro,  $t$  é considerado em ano, e  $a$  é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função  $y$ .



Admita ainda que  $y(0)$  fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio.

- O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a
- (A) 3.
  - (B) 4.
  - (C) 6.
  - (D)  $\log_2 7$ .
  - (E)  $\log_2 15$ .

**04. (INEP-MEC)** O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:  $p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$  em que  $t$  é o

tempo, em hora, e  $p(t)$  é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

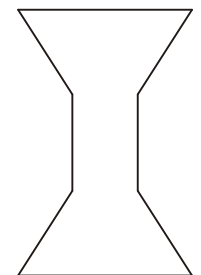
- (A) reduzida a um terço.
- (B) reduzida à metade.
- (C) reduzida a dois terços.
- (D) duplicada.
- (E) triplicada.

**05. (INEP-MEC)** O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R\$ 1.800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial ( $s$ ), em função do tempo de serviço ( $t$ ), em anos, é  $s(t) = 1.800 \cdot (1,03)^t$ .

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de tempo de serviço será, em reais,

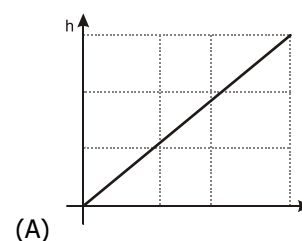
- (A) 7.416,00.
- (B) 3.819,24.
- (C) 3.709,62.
- (D) 3.708,00.
- (E) 1909,62.

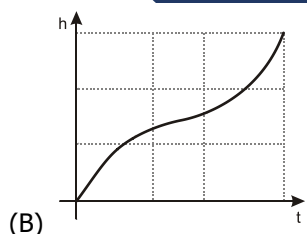
**06. (INEP-MEC)** Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampolheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura é a vista frontal dessa escultura.



No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante.

O gráfico que expressa a altura ( $h$ ) da água na escultura em função do tempo ( $t$ ) decorrido é





- (D)  $a < 3$  e  $a \neq 0$ .  
(E)  $a > 3$  e  $a \neq 4$ .

**11. (INEP-MEC)** A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo. O gráfico anterior representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13h30 será aproximadamente de

- (A) 10%  
(B) 15%  
(C) 25%  
(D) 35%  
(E) 50%

**12. (UNIT-SE)** Uma determinada máquina industrial se deprecia de tal forma que seu valor,  $t$  anos após a sua compra, é dado por  $v(t) = V_0 \cdot 2^{-0,2t}$ , em que  $V_0$  é uma constante real. Se, após 10 anos, a máquina estiver valendo R\$ 12 000,00, determine o valor que ela foi comprada.

**13. (FIC / FACEM)** A produção de uma indústria vem diminuindo ano a ano. Num certo ano, ela produziu mil unidades de seu principal produto. A partir daí, a produção anual passou a seguir a lei  $y = 1000 \cdot (0,9)^x$ . O número de unidades produzidas no segundo ano desse período recessivo foi de:

- (A) 900  
(B) 1000  
(C) 180  
(D) 810  
(E) 90

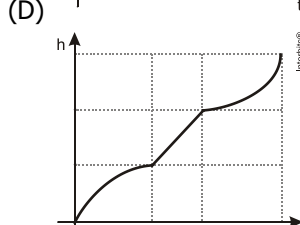
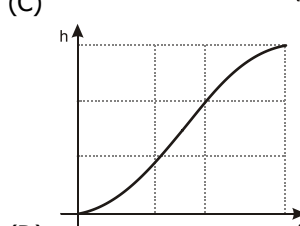
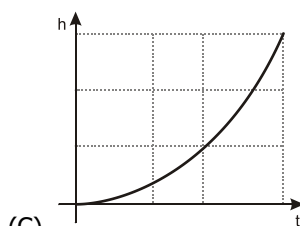
**14. (UPE)** Se  $f(t) = 10 \cdot 2^t$  é uma função que avalia a evolução de uma cultura de bactérias, em  $t$  horas, ao cabo de quantas horas teremos  $f(t) = 5120$ ?

**15. (UFMG)** O crescimento de uma cultura de bactérias obedece a função  $N(t) = 600 \cdot 3^{kt}$  em que  $N$  é o número de bactérias no instante  $t$ , sendo  $t$  o tempo em horas. A produção tem início em  $t = 0$ . Transcorrido 12 horas há 1800 bactérias ao todo. Determine o valor de  $k$ , e o número de bactérias após 24 horas do início da produção.

**16. (Matemática - Ciência e Aplicações)** Uma imobiliária acredita que o valor  $v$  de um imóvel no litoral varia segundo a lei  $v(t) = 60000 \cdot (0,9)^t$ , em que  $t$  é o número de anos contados a partir de hoje.

(A) Qual é o valor atual desse imóvel?

(B) Qual é a desvalorização percentual anual desse imóvel?



**07. (UEL, 2012)** A espessura da camada de creme formada sobre um café expresso na xícara, servido na cafeteria A, no decorrer do tempo, é descrita pela função  $E(t) = a2^{bt}$ , onde  $t \geq 0$  é o tempo (em segundos) e  $a$  e  $b$  são números reais. Sabendo que inicialmente a espessura do creme é de 6 milímetros e que, depois de 5 segundos, se reduziu em 50%, qual a espessura depois de 10 segundos?

**08. (UNIRIO)** Numa população de bactérias, há  $P(t) = 10^9 \cdot 4^{3t}$  bactérias no instante  $t$  medido em horas (ou fração da hora). Sabendo-se que inicialmente existem  $10^9$  bactérias, quantos minutos são necessários para que se tenha o dobro da população inicial?

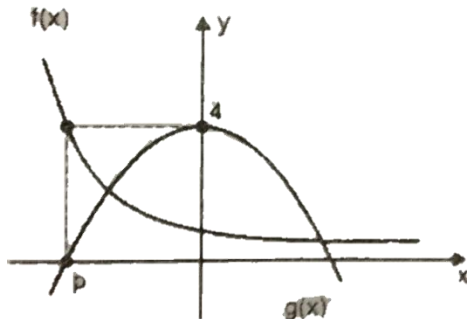
- (A) 20  
(B) 12  
(C) 30  
(D) 15  
(E) 10

**09. (PUC-ADP)** Uma cultura tem, inicialmente, 125 bactérias. Sabendo-se que essa população dobra a cada 1 hora, o tempo necessário, em horas, para que o número de bactérias chegue a 256.000, é igual a:

**10. (PUC-MG)** Os valores de  $a \in \mathbb{R}$  que tornam a função exponencial  $f(x) = (a - 3)^x$  decrescente são:

- (A)  $a < 3$ .  
(B)  $0 < a < 3$ .  
(C)  $3 < a < 4$ .

**17. (UFPE)** Com base no esboço dos gráficos das funções  $f(x) = (4)^{\frac{-x}{2}}$  e  $g(x) = ax^2 + b$ , apresentado abaixo, qual o valor de  $g(-1)$ ?



#### MÓDULO 4- FUNÇÃO Logarítmica

$a^x = b \iff x = \log_a b$ 

$a^x = b$  → logaritmo  
 $x$  → Exponente (logaritmo)  
 $b$  → logaritmando  
 $a$  → base

Base:

 $a > 0, a \neq 1$ 

Logaritmando:

 $b > 0$

♣ Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais positivos ( $a \neq 1, b > 0$  e  $a > 0$ ), denomina-se logaritmo de  $a$  na base  $b$  o expoente  $x$  ( $\log_b a = x$ ), sendo  $b^x = a$ :

$$\log_b a = x \iff b^x = a$$

$a$  = logaritmando  
 $b$  = base do logaritmo  
 $x$  = logaritmo

♣ Entenda: A que expoente **b** se deve elevar o número 2 para se obter 8?

$$2^b = 8 \iff 2^b = 2^3 \text{ então } b = 3$$

Portanto:  $\log_2 8 = 3$

♣ Entenda: A que expoente **b** se deve elevar o número 2 para se obter  $1/32$ ?

$$2^b = 1/32 \iff 2^b = 1/2^5 \iff 2^b = 2^{-5} \text{ então } b = -5$$

Portanto:  $\log_2 1/32 = -5$

♣ Propriedades dos logaritmos:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
- $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
- $\log_a (u^n) = n \cdot \log_a u$
- $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$

♣ Aplique seu conhecimento para encontrar os valores de **x**:

- a)  $\log_3 9 = x$
- b)  $\log_5 125 = x$
- c)  $\log_{25} (0,2) = x$

♣  $f(x) = \log_a x$

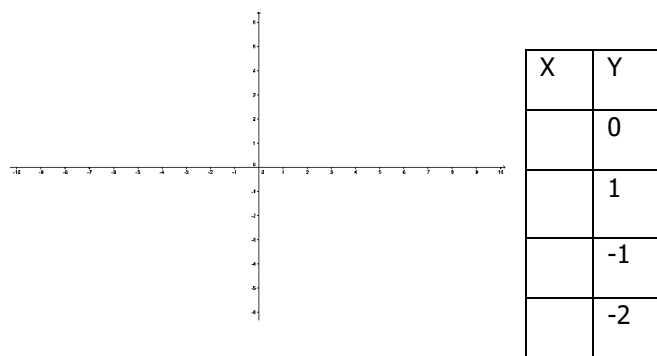
$X > 0$

$a > 0 \text{ e } a \neq 1$

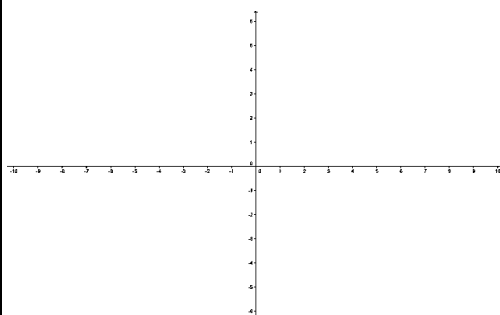
♣ Dada a função  $f(x) = \log_{(x-2)} (4-x)$ , temos as seguintes restrições:

- 1)  $4-x > 0 \rightarrow -x > -4 \rightarrow x < 4$
- 2)  $x-2 > 0 \rightarrow x > 2$
- 3)  $x-2 \neq 1 \rightarrow x \neq 1+2 \rightarrow x \neq 3$

♣ A partir de alguns pontos, teste e aplique no gráfico de  $y = \log_2 x$ , com  $a > 1$ .



♣ A partir de alguns pontos, teste e aplique no gráfico de  $y = \log_{1/2} x$ , com  $0 < a < 1$ .



X	Y
	0
	1
	3
	-1

♣ Características do gráfico da função logarítmica

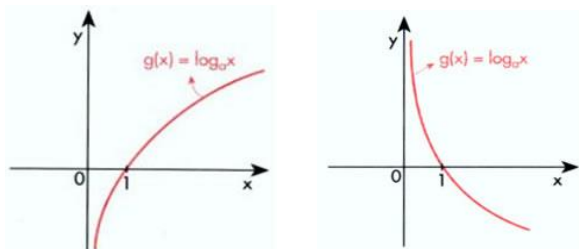
$y = \log_a x$

1-O gráfico está totalmente à direita do eixo y, pois ela é definida para  $x > 0$ .

2-Intersecta o eixo das abscissas no ponto (1,0), então a raiz da função é  $x = 1$ .

3-Note que y assume todos as soluções reais, por isso dizemos que a Im(imagem) = R.

♣ Gráficos:



## EXERCÍCIOS

**01. (INEP-MEC)** A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como  $M_w$ ), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica.  $M_w$  e  $M_0$  se relacionam pela fórmula:  $M_w = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10} (M_0)$  Onde  $M_0$  é o movimento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina·cm. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude  $M_w = 7,3$ .

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico  $M_0$  do terremoto de Kobe (em dina·cm)?

- (A)  $10^{-5,10}$
- (B)  $10^{-0,73}$
- (C)  $10^{12,00}$
- (D)  $10^{21,65}$
- (E)  $10^{27,00}$

**02. (UDESC)** Se  $\log_a b = 3$  e  $\log_{ab} c = 4$ , então  $\log_a c$  é:

- (A) 12
- (B) 16
- (C) 24
- (D) 8
- (E) 6

**03. (UDESC)** Sabendo que  $\log_3(7x - 1) = 3$  e que  $\log_2(y^3 + 3) = 7$  pode-se afirmar que  $\log_y(x^2 + 9)$  é igual a:

- (A) 6
- (B) 2
- (C) 4
- (D) -2
- (E) -4

**04. (INEP-MEC)** Terremotos são eventos naturais que não têm relação com eventos climáticos extremos, mas podem ter consequências ambientais devastadoras, especialmente quando seu epicentro ocorre no mar, provocando tsunamis. Uma das expressões para se calcular a violência de um terremoto na escala Richter é:

$M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \frac{E}{E_0}$ , onde M é a magnitude do terremoto, E é a energia liberada (em joules) e  $E_0 = 10^{4,5}$  joules é a energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência. Qual foi a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto do Japão de 11 de março de 2011, que atingiu magnitude 9 na escala Richter?

- (A)  $10^{14}$  Joules.
- (B)  $10^{16}$  Joules.
- (C)  $10^{17}$  Joules.
- (D)  $10^{18}$  Joules.
- (E)  $10^{19}$  Joules

**05. (INEP-MEC)** Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um

inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do cézio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após  $t$  anos, é calculada pela expressão  $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$ , onde  $A$  é a massa inicial e  $k$  é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para  $\log_{10} 2$ .

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do cézio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

- (A) 27
- (B) 36
- (C) 50
- (D) 54.
- (E) 100.

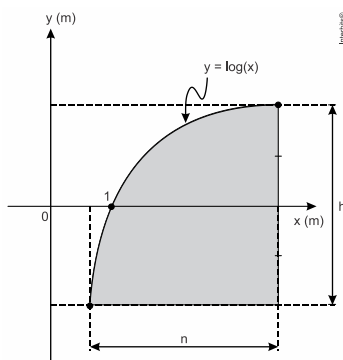
**06. (INEP-MEC)** Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000 C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min.

Use 0,477 como aproximação para  $\log(3)$  e 1,041 como aproximação para  $\log(11)$ .

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 C é mais próximo de

- (A) 22.
- (B) 50.
- (C) 100.
- (D) 200.
- (E) 400.

**07. (INEP-MEC)** Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação  $y = \log(x)$ , conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo  $x$  sempre divida ao meio a altura  $h$  do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo  $x$ . Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura  $h$  do vidro em função da medida  $n$  de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

(A)

$$\log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right) - \log\left(\frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$$

(B)  $\log\left(1 + \frac{n}{2}\right) - \log\left(1 - \frac{n}{2}\right)$

(C)  $\log\left(1 + \frac{n}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{n}{2}\right)$

(D)  $\log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$

(E)  $2 \log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$

**08. (UFRJ)** O ouvido humano pode perceber uma extensa faixa de intensidades de ondas sonoras (som), desde cerca de  $10^{-12} \text{ w/m}^2$  (que se toma usualmente como o limiar de audição) até cerca de  $1 \text{ w/m}^2$  (que provoca a sensação de dor na maioria das pessoas). Em virtude da enorme faixa de intensidades a que o ouvido é sensível usa-se uma escala logarítmica para descrever o nível de intensidade de uma onda sonora. O nível de intensidade  $G$  medido em

decibéis (db) se define por  $G = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ , onde  $I$

é a intensidade do som.

(A) Calcule nessa escala, o limiar de audição.

(B) Calcule nessa escala, o limiar de audição dolorosa.

**09. (UERJ)** Admita que, em um determinado lago, a cada 40 cm de profundidade, a intensidade de luz é reduzida em 20%, de acordo com a equação

$$I = I_0 \cdot 0,8^{\frac{h}{40}}$$

na qual  $I$  é a intensidade da luz em uma profundidade  $h$ , em centímetros, e  $I_0$  é a intensidade na superfície. Um nadador verificou, ao mergulhar nesse lago, que a intensidade da luz, em um ponto  $P$ , é de 32% daquela observada na superfície. A profundidade do ponto  $P$ , em metros, considerando  $\log 2 = 0,3$ , equivale a:

(A) 0,64

(B) 1,8

(C) 2,0

(D) 3,2

**10. (UERJ)** Um lago usado para abastecer uma cidade foi contaminado após um acidente industrial, atingindo o nível de toxidez  $T_0$ , correspondente a dez vezes o nível inicial. Leia as informações a seguir.

• A vazão natural do lago permite que 50% de seu volume sejam renovados a cada dez dias.

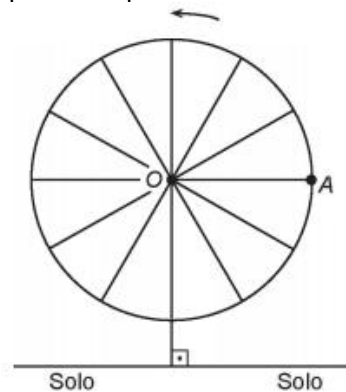
• O nível de toxidez  $T(x)$ , após  $x$  dias do acidente, pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$T(x) = T_0 \cdot (0,5)^{0,1x}$$

Considere  $D$  o menor número de dias de suspensão do abastecimento de água, necessário para que a toxidez retorne ao nível inicial. Sendo  $\log 2 = 0,3$ , o valor de  $D$  é igual a:

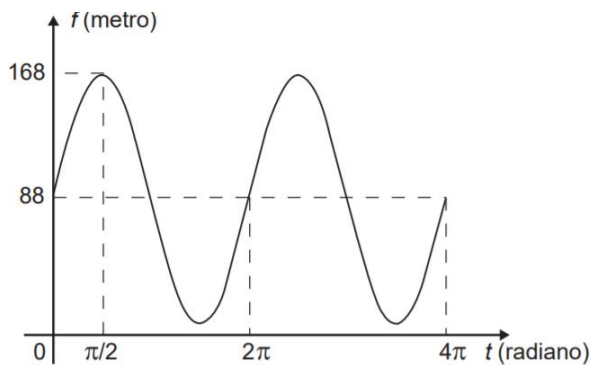
- (A) 30
- (B) 32
- (C) 34
- (D) 36

**10. (INEP-MEC)** Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto  $A$  representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: <http://en.wikipedia.org>. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento  $OA$  se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto  $O$ . Sejam  $t$  o ângulo determinado pelo segmento  $OA$  em relação à sua posição inicial, e  $f$  a função que descreve a altura do ponto  $A$ , em relação ao solo, em função de  $t$ . Após duas voltas completas,  $f$  tem o seguinte gráfico:

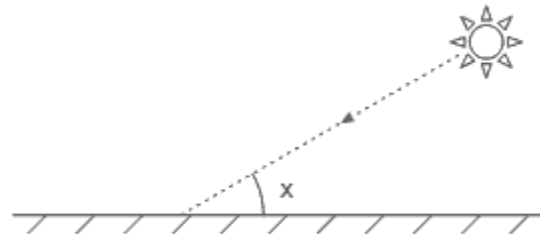


A expressão da função altura é dada por

- a)  $f(t) = 80\sin(t) + 88$
- b)  $f(t) = 80\cos(t) + 88$
- c)  $f(t) = 88\cos(t) + 168$
- d)  $f(t) = 168\sin(t) + 88\cos(t)$
- e)  $f(t) = 88\sin(t) + 168\cos(t)$

**11. (INEP-MEC)** Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo  $x$  com a sua superfície, conforme indica a figura.

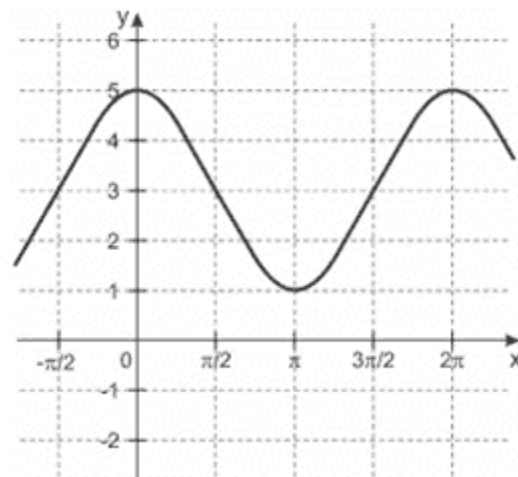
Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por  $I(x) = k \cdot \sin(x)$  sendo  $k$  uma constante, e supondo-se que  $x$  está entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .



Quando  $x = 30^\circ$ , a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

- a) 33%
- b) 50%
- c) 57%
- d) 70%
- e) 86%

**12. (CFTMG 2015)** O esboço do gráfico da função  $f(x) = a + b\cos(x)$  é mostrado na figura seguinte.

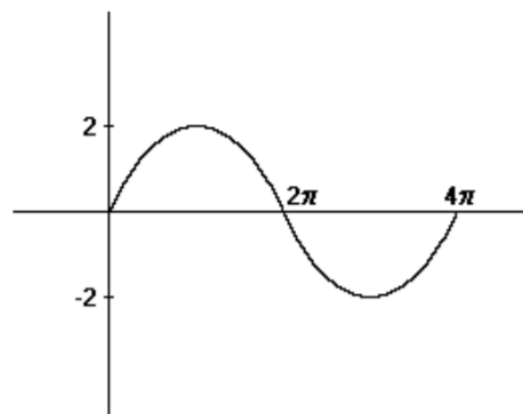


Nessa situação, o valor de  $ab$  é

- a) 3
- b) -3
- c) 6
- d) -6
- e)  $\pi$

**13. (INEP-MEC)** A conversão de capim-elefante em energia não polui. Mesmo o gás carbônico,  $\text{CO}_2$ , emitido durante a queima da biomassa utilizada é menor do que o consumido pela gramínea durante todo o seu crescimento.



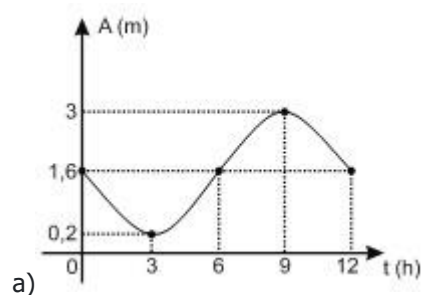


- a)  $\sin x$
- b)  $2 \sin \left( \frac{x}{2} \right)$
- c)  $2 \sin x$
- d)  $2 \sin 2x$
- e)  $\sin 2x$

**15. (Ufpb 2012)** Um especialista, ao estudar a influência da variação da altura das marés na vida de várias espécies em certo manguezal, concluiu que a altura  $A$  das marés, dada em metros, em um espaço de tempo não muito grande, poderia ser modelada de acordo com a função:

$$A(t) = 1,6 - 1,4 \sin \left( \frac{\pi}{6} t \right)$$

Nessa função, a variável  $t$  representa o tempo decorrido, em horas, a partir da meia-noite de certo dia. Nesse contexto, conclui-se que a função  $A$ , no intervalo  $[0,12]$ , está representada pelo gráfico:



a)

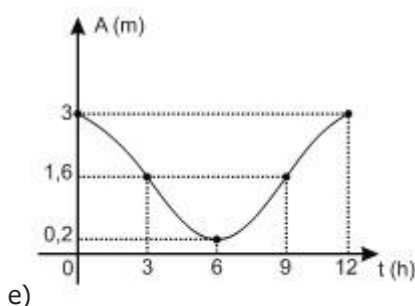
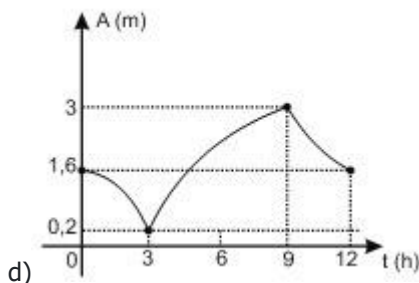
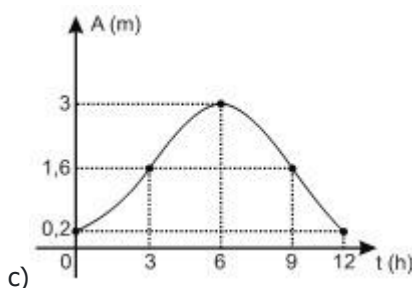
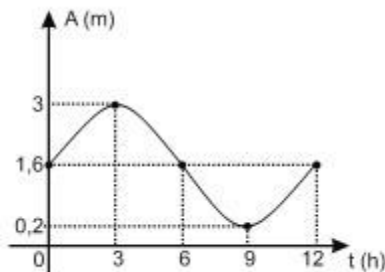


Considere, no gráfico, que  $\alpha$  é a medida do ângulo do setor circular, associado a energia hidrelétrica na composição da matriz energética nacional atual, e que  $\beta$  é a medida do ângulo do setor circular, associado a petróleo, gás e carvão na composição da matriz energética nacional com a contribuição potencial do capim-elefante. (VARGAS, 2010, p. 112-114).

Nessas condições,  $\alpha - \beta$  é igual a

- a)  $\frac{17\pi}{10}$  rad
- b)  $\frac{13\pi}{10}$  rad
- c)  $\frac{11\pi}{10}$  rad
- d)  $\frac{9\pi}{10}$  rad
- e)  $\frac{7\pi}{10}$  rad

**14. (Fuvest)** A figura a seguir mostra parte do gráfico da função:



**16. (Ufsm 2008)** Em determinada cidade, a concentração diária, em gramas, de partículas de fósforo na atmosfera é medida pela função

$$C(t) = 3 + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right),$$

em que  $t$  é a quantidade de horas para fazer essa medição.

O tempo mínimo necessário para fazer uma medição que registrou 4 gramas de fósforo é de

- a) 1/2 hora.
- b) 1 hora.
- c) 2 horas.
- d) 3 horas.
- e) 4 horas.

**17. (Ufsm 2007)** Uma gráfica que confeccionou material de campanha determina o custo unitário de um de seus produtos, em reais, de acordo com a lei  $C(t) = 200 + 120 \cdot \operatorname{sen}(n \cdot t)/2$ , com  $t$  medido em horas de trabalho. Assim, os custos máximos e mínimo desse produto são

- a) 320 e 200
- b) 200 e 120
- c) 200 e 80
- d) 320 e 80
- e) 120 e 80

**18. (INEP-MEC)** - Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção e consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço  $P$ , em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função:

$$P(x) = 8 + 5 \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$$

Onde  $x$  representa o mês do ano,

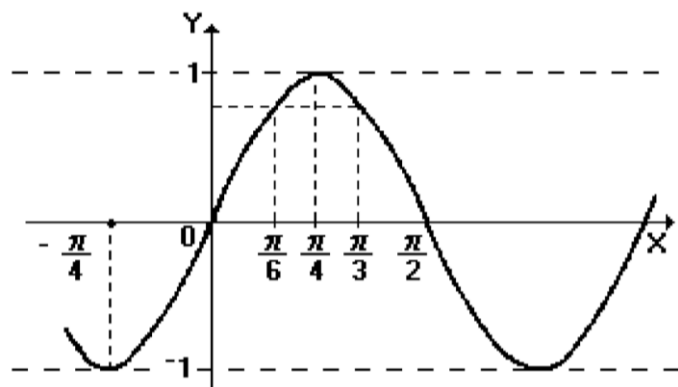
sendo  $x=1x=1$  associado ao mês de janeiro,  $x=2x=2$  ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até  $x=12x=12$  associado ao mês de dezembro.

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

- a) Janeiro.
- b) Abril.
- c) Junho.

- d) Julho.  
e) Outubro.

**19. (Puccamp)** Observe o gráfico a seguir. A função real de variável real que MELHOR corresponde a esse gráfico é



- a)  $y = \cos x$   
b)  $y = \sin x$   
c)  $y = \cos 2x$   
d)  $y = \sin 2x$   
e)  $y = 2 \sin x$

# RASCUNHOS

95



Daniel França  
matemática

# RASCUNHOS

97



Daniel França  
matemática

# COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

93





♣ Arranjo simples:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Quando dentro do arranjo,  $n=p$ , estaremos diante de uma **permutação simples**:

O que irá ser feito é, essencialmente, permutar (**trocar**) as posições de elementos de um conjunto dado.

$$P_n = n!$$

♣ Entenda: **Quantos são os anagramas (novas palavras) obtidos a partir da palavra AMOR?**

- Alguns deles são ROMA, ROAM, MORA, AMOR, MROA, etc.
- **Logo, Veja que estamos simplesmente permutando todas as 4 letras. Assim, o total de anagramas é dado por**  
 $P_4 = 4! = 24$

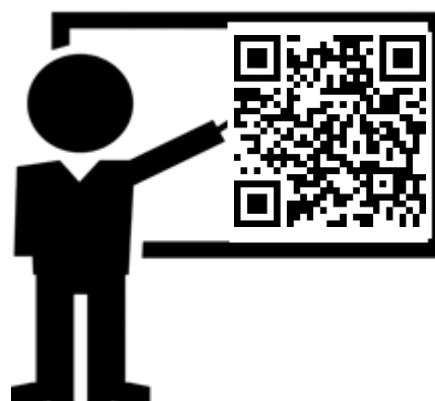
♣ Entenda o seguinte caso: **Quantos são os anagramas (novas palavras) obtidos a partir da palavra AMORA?**

**Percebeu que existe a repetição de uma letra? Portanto, estamos, então, diante de uma permutação com repetição:**

$$P_n^{á,â,...,ã} = \frac{n!}{á!..â!...ã!}$$

- **Logo, nosso calculo deve ser:**

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60$$



♣ **Aplique:**

#### Exercício 01

Com os números do conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  quantas senhas  
a) de 3 letras podemos formar?

## Módulo 1- análise combinatória

♣ Princípio fundamental da contagem (PFC)

Se uma decisão d1 pode ser tomada de x maneiras diferentes e se, uma vez tomada a decisão d1, a decisão d2 puder ser tomada de y maneiras diferentes, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d1 e d2 é dado pelo produto  $x \cdot y$ .

- Observação importante: O **princípio multiplicativo** pode ser generalizado para mais de duas decisões.

♣ Entenda: Numa sala existem 3 garotas (Marília, Cláudia e Katarina) e 4 rapazes (Caio, Lucas, Rafael Thiago). Quantos casais diferentes podemos formar com essas 7 pessoas?

- A decisão d1 pode ser tomada de 4 maneiras diferentes (existem 4 homens);
- A decisão d2 pode ser tomada de 3 maneiras diferentes (existem 3 mulheres).
- **Logo, o número total de casais é  $4 \cdot 3 = 12$ .**

♣ **Fatorial (!)**

Seja n um número natural maior que 1. O fatorial de n, indicado por  $n!$ , é definido como o produto dos n números naturais consecutivos de 1 até n, isto é:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

♣ Entenda:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

♣ Formas de agrupamento

### ARRANJO X COMBINAÇÃO

Quando agrupamos e, dentro do grupo, trocamos as posições dos elementos, esse fato alterar a característica do grupo, **a ordem importará**. Então, estaremos diante de **arranjo**.

Quando as trocas dos elementos **não ocasionarem mudança** no grupo, será uma **combinação**.

♣ Combinação simples:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

b) de 3 letras distintas  
podemos formar?

- (B) 2 480  
(C) 1 680  
(D) 1 240  
(E) 840

### Exercício 02

Com as letras A, B, C, D, E quantas senhas de 3 letras distintas podemos formar?

### Exercício 03

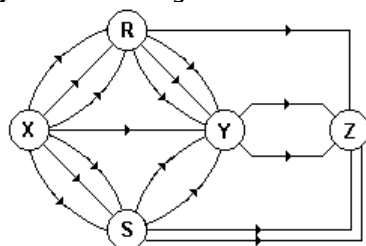
Com as frutas A, B, C, D, E quantas vitaminas de 3 frutas podemos formar?

### Exercício 04

Quantos anagramas da palavra SONHAR começam e terminam por vogal?

## EXERCÍCIOS

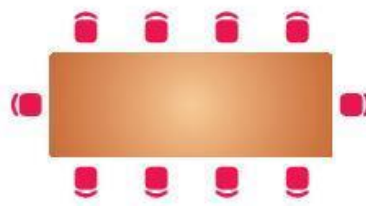
01. (UFMG) Observe o diagrama.



O número de ligações distintas entre X e Z é

- (A) 39  
(B) 41  
(C) 35  
(D) 45

02. (INEP- MEC) Na sala de reuniões de certa empresa há uma mesa retangular com 10 poltronas dispostas da forma como é mostrado na figura abaixo.



Certo dia, sete pessoas foram convocadas para participar de uma reunião a ser realizada nessa sala: o presidente, o vice- presidente, um secretário e quatro membros da diretoria. Sabe-se que:

- o presidente e o vice-presidente deverão ocupar exclusivamente as poltronas das cabeceiras da mesa;
- o secretário deverá ocupar uma poltrona ao lado do presidente.

Considerando que tais poltronas são fixas no piso da sala, de quantos modos as sete pessoas podem nelas se acomodar para participar de tal reunião?

- (A) 3 360

03. (INEP-MEC) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

- (A) uma combinação e um arranjo, respectivamente.  
(B) um arranjo e uma combinação, respectivamente.  
(C) um arranjo e uma permutação, respectivamente.  
(D) duas combinações.  
(E) dois arranjos.

04. (INEP-MEC) Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Museus Nacionais	Museus Internacionais
Masp – São Paulo	Louvre – Paris
MAM – São Paulo	Prado – Madri
Ipiranga – São Paulo	British Museum – Londres
Imperial – Petrópolis	Metropolitan – Nova York

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

- (A) 6  
(B) 8  
(C) 20  
(D) 24  
(E) 36

05. (UFMG) Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Museus Nacionais	Museus Internacionais
Masp – São Paulo	Louvre – Paris
MAM – São Paulo	Prado – Madri
Ipiranga – São Paulo	British Museum – Londres
Imperial – Petrópolis	Metropolitan – Nova York

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

- (A) 6

**06. (INEP-MEC)** O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e da a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertou a resposta porque há:

- (A) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.  
(B) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.  
(C) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.  
(D) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.  
(E) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

**07. (INEP-MEC)** A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por:



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é:

- (A) 12.  
(B) 31.  
(C) 36.  
(D) 63.  
(E) 720

**08. (UFMG)** O jogo de dominó possui 28 peças distintas. Quatro jogadores repartem entre si essas 28 peças, ficando cada um com 7 peças. De quantas maneiras distintas se pode fazer tal distribuição?

- (A)  $28! / 7! 4!$   
(B)  $28! / 4! 24!$   
(C)  $28! / (7!)^4$   
(D)  $28! / 7! 21!$   
(E)  $28! / 21!$

**09. (INEP-MEC)** Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por:

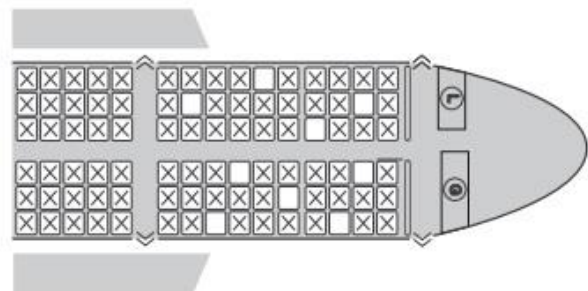
- (A)  $10^2 \cdot 26^2$   
(B)  $10^2 \cdot 52^2$   
(C)  $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$   
(D)  $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! 2!}$   
(E)  $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! 2!}$

**10. (UEL)** Para responder a certo questionário, preenche-se o cartão apresentado a seguir, colocando-se um "x" em uma só resposta para cada questão. De quantas maneiras distintas pode-se responder a esse questionário?

CARTÃO RESPOSTA					
QUESTÕES	1	2	3	4	5
SIM	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
NÃO	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- (A) 3 125  
(B) 120  
(C) 32  
(D) 25  
(E) 15

**11. (INEP-MEC)** Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: [www.gebh.net](http://www.gebh.net). Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

- (A)  $9! / 2!$   
(B)  $9! / 7! \cdot 2!$   
(C)  $7!$

**12. (INEP-MEC)** O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de São Paulo. Disponível em:  
[www1.folha.uol.com.br](http://www1.folha.uol.com.br). Acesso em: 18 fev. 2012  
(adaptado)

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

- (A) 14
- (B) 18
- (C) 20
- (D) 21
- (E) 23

**13. (INEP-MEC)** Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

grupos taxonômicos	número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primates	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos — uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

- (A) 1.320.
- (B) 2.090.
- (C) 5.845.
- (D) 6.600.
- (E) 7.245.

**14. (INEP-MEC)** No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.



O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é

- (A) 6.
- (B) 7.
- (C) 8.
- (D) 9.
- (E) 10.

**15. (INEP-MEC)** Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas.

Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por

- (A) 100.
- (B) 90.
- (C) 80.
- (D) 25.
- (E) 20.

**16. (INEP-MEC)** Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente

poderá ser posta em prática?

(A)  $20 \times 8! + (3!)^2$

(B)  $8! \times 5! \times 3!$

(C)  $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$

(D)  $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$

(E)  $\frac{16!}{2^8}$

**17. (INEP-MEC)** Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

(A) 64

(B) 56

(C) 49

(D) 36

(E) 28

**18. (INEP-MEC)** O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

(A)  $\frac{10!}{2! \times 8!} - \frac{4!}{2! \times 2!}$

(B)  $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$

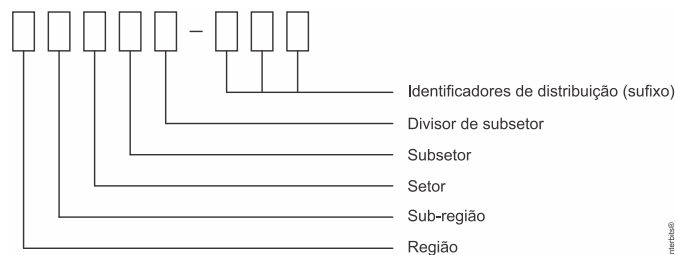
(C)  $\frac{10!}{2! \times 8!} - 2$

(D)  $\frac{6!}{4!} + 4 \times 4$

(E)  $\frac{6!}{4!} + 6 \times 4$

**19. (INEP-MEC)** O Código de Endereçamento Postal (CEP) código numérico constituído por oito algarismos. Seu objetivo é orientar e acelerar o encaminhamento, o tratamento e a distribuição de objetos postados nos

Correios. Ele está estruturado segundo o sistema métrico decimal, sendo que cada um dos algarismos que o compõe codifica região, sub-região, setor, subsetor, divisor de subsetor e identificadores de distribuição conforme apresenta a ilustração.



O Brasil encontra-se dividido em dez regiões postais para fins de codificação. Cada região foi dividida em dez sub-regiões. Cada uma dessas, por sua vez, foi dividida em dez setores. Cada setor, dividido em dez subsetores. Por fim, cada subsetor foi dividido em dez divisores de subsetor. Além disso, sabe-se que os três últimos algarismos após o hífen são denominados de sufixos e destinam-se à identificação individual de localidades, logradouros, códigos especiais e unidades dos Correios.

A faixa de sufixos utilizada para codificação dos logradouros brasileiros inicia em 000 e termina em 899.

Disponível em: [www.correios.com.br](http://www.correios.com.br) Acesso em: 22 ago. 2017 (adaptado).

Quantos CEPs podem ser formados para a codificação de logradouros no Brasil?

(A)  $5 \cdot 0 + 9 \cdot 10^2$

(B)  $10^5 + 9 \cdot 10^2$

(C)  $2 \cdot 9 \cdot 10^7$

(D)  $9 \cdot 10^2$

(E)  $9 \cdot 10^7$

**20. (INEP-MEC)** Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta-corrente pela internet.

Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

(A)  $\frac{62^6}{10^6}$



(C)  $\frac{62! \cdot 4!}{10! \cdot 56!}$

(D)  $62! - 10!$

(E)  $62^6 - 10^6$

## Módulo 2- Probabilidade

♣ As questões de probabilidade baseiam-se nas situações propostas a partir dos **casos equiprováveis**, isto é, os eventos possuem probabilidades iguais de ocorrência.

♣ número de elementos de A ➡  $n(A)$

número de elementos de E ➡  $n(E)$

probabilidade de ocorrer A ➡  $P(A)$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

♣ O número de elementos pode ser o total de escolhas ou possibilidades possíveis, conhecido como **espaço amostral**.

Conectivos:

CONECTIVO	IDEIA DE:
E	MULTIPLICAÇÃO
OU	SOMA

## EXERCÍCIOS

**01. (INEP-MEC)** Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

### Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: <http://img.terra.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Questão sobre Probabilidade no Enem de 2011

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

(A) 8%.

(B) 9%.

(C) 11%.

(D) 12%.

(E) 22%.

**02. (INEP-MEC)** Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

(A)  $\frac{1}{2}$

(B)  $\frac{5}{8}$

(C)  $\frac{1}{4}$

(D)  $\frac{5}{6}$

(E)  $\frac{5}{14}$

**03. (INEP-MEC)** Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes saudáveis e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

1) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.

2) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

3) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.

4) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste de diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

Conforme o quadro teste proposto, a sensibilidade dele é de:

(A) 47,5%.

(B) 85,0%.

(C) 86,3%.

(D) 94,4%.

(E) 95,0%.



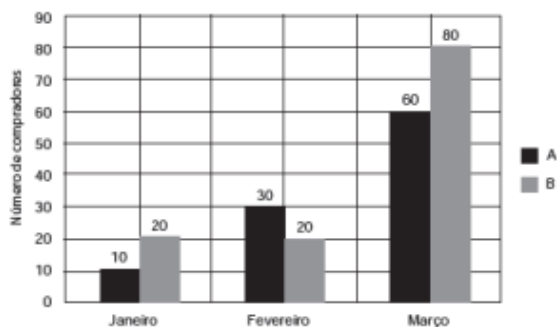
**04. (INEP-MEC)** O psicólogo

de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

- (A) 0,02048.  
(B) 0,08192.  
(C) 0,24000.  
(D) 0,40960.  
(E) 0,49152

**05. (INEP-MEC)** Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

- (A) 1/20  
(B) 3/242  
(C) 5/22  
(D) 6/25  
(E) 7/15

**06. (INEP-MEC)** Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso. Em setembro, a máquina I produziu 54/100 do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, 25/1000 eram defeituosos. Por sua vez, 38/1000 dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos. O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que  $P$  indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

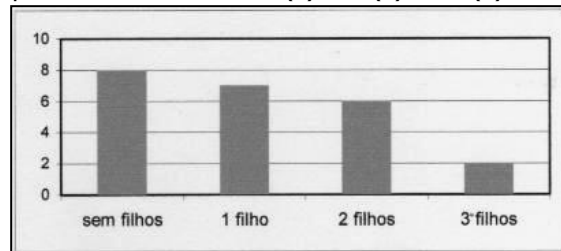
$0 \leq P < 2/100$  Excelente  
 $2/100 \leq P < 4/100$  Bom  
 $4/100 \leq P < 6/100$  Regular  
 $6/100 \leq P < 8/100$  Ruim  
 $8/100 \leq P \leq 1$  Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como

- (A) excelente  
(B) bom

- (C) regular  
(D) ruim  
(E) péssimo

**07. (INEP-MEC)** As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico mostrado. Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:



- (A) 1/3  
(B) 1/4  
(C) 7/15  
(D) 7/23  
(E) 7/25

**08. (INEP-MEC)** Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada urna. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

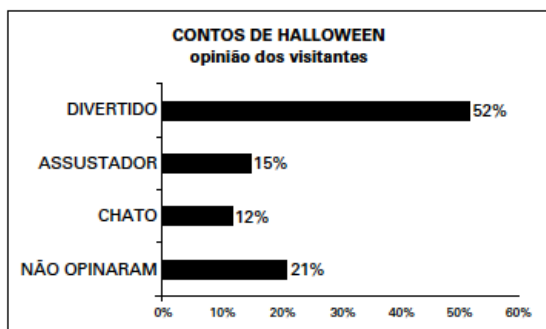
Uma jogada consiste em:

- 1º) o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;
  - 2º) ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;
  - 3º) em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;
  - 4º) se a cor da última bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.
- Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

- (A) Azul.  
(B) Amarela.  
(C) Branca.  
(D) Verde.  
(E) Vermelha

**09. (INEP-MEC)** Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados "Contos de Halloween". Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas relações em: "Divertido", "Assustador" ou "Chato". Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de Halloween".

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é mais aproximada por

- (A) 0,09.
- (B) 0,12.
- (C) 0,14.
- (D) 0,15.
- (E) 0,18.

**10. (INEP-MEC)** José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

- (A) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.
- (B) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.
- (C) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.
- (D) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
- (E) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

**11. (INEP-MEC)** Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna.

Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir;

Urna A - Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;

Urna B - Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde;

Urna C - Possui duas bolas pretas e duas verdes;

Urna D - Possui três bolas brancas e três bolas pretas;

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

Opção 1 - Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;

Opção 2 - Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B;

Opção 3 - Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A

Opção 4 - Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;

Opção 5 - Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5



# RASCUNHOS

107



Daniel França  
matemática

# RASCUNHOS

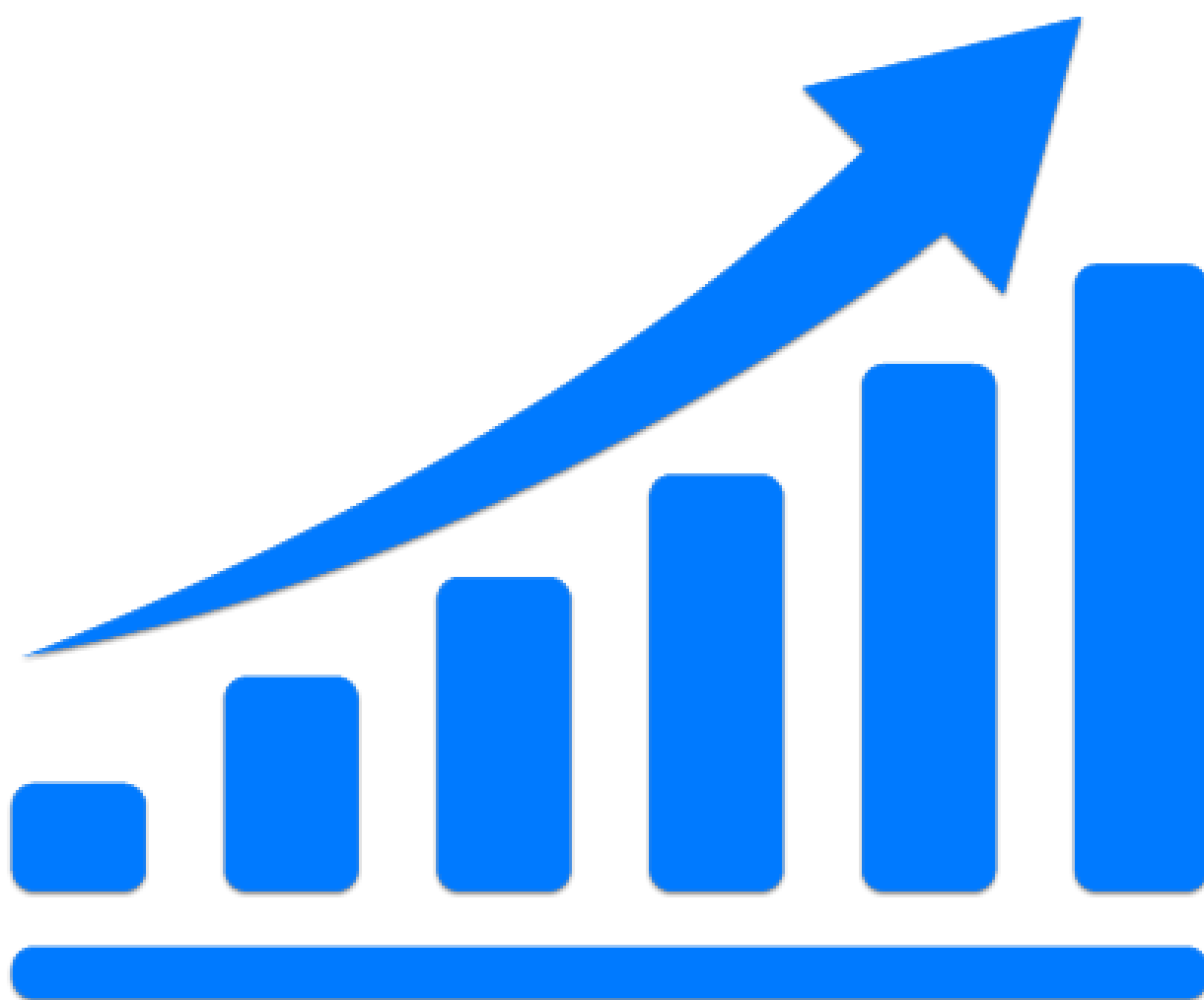
108



Daniel França  
matemática

# ESTATÍSTICA

109



## Módulo 1- Estatística

- ♣ *Estatística é uma forma de traduzir o comportamento coletivo em números.*
- ♣ Alguns conceitos:

- **Universo Estatístico ou População Estatística:** Conjunto formado por todos os elementos que possam oferecer dados pertinentes ao assunto em questão.
- **Amostra:** É um subconjunto da população estatística. Quando o Universo Estatístico é muito vasto ou quando não é possível coletar dados de todos os seus elementos, retira-se desse universo um subconjunto chamado amostra. Os dados são coletados dessa amostra.
- **Rol:** É toda sequência de dados numéricos colocados em ordem decrescente ou crescente

### ♣ Medidas de Tendência Central

As medidas de tendência central são utilizadas quando é necessário representar um conjunto de dados, obtidos em uma pesquisa, por meio de um único valor. Em geral, são 3: **média, moda e mediana**.

### ♣ Média Aritmética simples:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

### ♣ Média Aritmética Ponderada:

$$\bar{x}_p = \frac{x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

### ♣ Mediana:

Dado um conjunto com  $n$  termos,  
Se  $n$  é ímpar, a mediana é o **termo central** do **rol**.  
Se  $n$  é par, a mediana é a média aritmética dos **termos centrais** do **rol**.

### ♣ Moda:

Em uma amostra cujas frequências dos elementos não são todas iguais, chama-se moda, que se indica por  $M_o$ , todo elemento de **maior frequência** possível.

### ♣ Medidas de Dispersão

#### ♣ Desvio absoluto médio (DAM):

Determina o quanto cada nota está afastada da média. Essas diferenças são chamadas de desvio.

$$D_{am} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

### ♣ Variância

Define-se Variância como a média aritmética dos quadrados dos desvios dos elementos da amostra:

$$Var. \text{ populacional} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

### Desvio Padrão ( $\delta$ ):

É a raiz quadrada da Variância.

## EXERCÍCIOS

**01.** Os salários dos funcionários de uma empresa estão distribuídos na tabela abaixo:

Salário	Frequência
\$400,00	5
\$600,00	2
\$1.000,00	2
\$5.000,00	1

Determine o salário médio, o salário mediano e o salário modal.

**02.** As notas de um candidato em suas provas de um concurso foram: 8,4; 9,1; 7,2; 6,8; 8,7 e 7,2.

A nota média, a nota mediana e a nota modal desse aluno, são respectivamente:

- (A) 7,9; 7,8; 7,2  
(B) 7,2; 7,8; 7,9  
(C) 7,8; 7,8; 7,9  
(D) 7,2; 7,8; 7,9  
(E) 7,8; 7,9; 7,2

**03. (INEP-MEC)** O procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta. A primeira luta foi entre os atletas

- (A) I e III.  
(B) I e IV.  
(C) II e III.  
(D) II e IV.  
(E) III e IV.

**04. (INEP-MEC)** Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que



entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

- (A) 2  
(B) 3  
(C) 4  
(D) 5  
(E) 6

**05. (INEP-MEC)** A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso:

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

- (A) 26  
(B) 29  
(C) 30  
(D) 31  
(E) 35

**06. (INEP-MEC)** Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas. O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais. A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

- (A) 18.  
(B) 19.  
(C) 22.  
(D) 25.  
(E) 26.

**07. (INEP-MEC)** Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante. A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos. Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45. Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas. A loja encaminhou um ofício ao do fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados sapatos de cor:

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito			
	Média	Mediana	Moda
Numerações dos sapatos com defeito	36	37	38

- (A) branca e os de número 38.  
(B) branca e os de número 37.  
(C) branca e os de número 36.  
(D) preta e os de número 38.  
(E) preta e os de número 37.

**08. (INEP-MEC)** Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de português, matemática, direito e informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior. O candidato aprovado será

- (A) K.  
(B) L.  
(C) M.  
(D) N.  
(E) P.

**09- (IFPE)** O ourives é um profissional que trabalha com objetos de ouro e prata. Ele sabe que o quilate é uma escala para medir a proporção de ouro em uma joia e decidiu derreter dois anéis de ouro para construir uma aliança. O primeiro anel era de ouro 18 quilates e

quilates e pesava 6 gramas. Feito isto, o ourives obteve uma aliança de 8 gramas com quantos quilates?

- (A) 10  
(B) 11  
(C) 12  
(D) 14  
(E) 18

**10. (INEP-MEC)** Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz  $4 \times 4$ , e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

A matriz escolhida foi:

A)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

D)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

B)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

E)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

C)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

**11. (INEP-MEC)** O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols. Se  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

- (A)  $X = Y < Z$ .  
(B)  $Z < X = Y$ .  
(C)  $Y < Z < X$ .

- (D)  $Z < X < Y$ .  
(E)  $Z < Y < X$ .

**12. (INEP-MEC)** Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas. Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos)

Equipes	Média	Moda	Desvio-padrão
Equipe I	45	40	5
Equipe II	45	41	4
Equipe III	45	44	1
Equipe IV	45	44	3
Equipe V	45	47	2

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe

- (A) I.  
(B) II.  
(C) III.  
(D) IV.  
(E) V.

**13. (INEP-MEC)** Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

- (A) Marco, pois a média e a mediana são iguais.  
(B) Marco, pois obteve menor desvio padrão.  
(C) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.  
(D) Paulo, pois obteve maior mediana.  
(E) Paulo, pois obteve maior desvio padrão

**14. (INEP-MEC)** Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0.

comparecido, essa equipe:

- (A) teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.
- (B) seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.
- (C) seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.
- (D) permaneceria na terceira posição,  
independentemente da nota obtida pelo aluno.
- (E) empataria com a equipe Ômega na primeira  
colocação se o aluno obtivesse nota 9.

**15. (INEP-MEC)** A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz  $A = [a_{ij}]$ , em que  $1 \leq i \leq 5$  e  $1 \leq j \leq 5$ , e o elemento  $a_{ij}$  corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco  $i$  para o banco  $j$  durante o mês. Observe que os elementos  $a_{ij} = 0$ , uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.

# RASCUNHOS

114



Daniel França  
matemática

# RASCUNHOS

115



Daniel França  
matemática

## CANAIS QUE INDICO...

Para base teórica:

<https://www.youtube.com/user/nerckie>



Para Questões:

<https://www.youtube.com/user/matematicario>



Para matemática Básica:

<https://www.youtube.com/user/professorferretto>

